2.5, 7.6-7.7

2.5 Basbyten & 7.6 Matriser & basbyten. Ortogonala matriser

Basbyte och matris.

Sats (Modifierad Sats 6, s137)**.** *"Prim" anger den nya basen.*

En bas i $\mathbb{R}^2$: $\begin{cases} \bar{e}_1' = s_{11}\bar{e}_1 + s_{21}\bar{e}_2 \\ \bar{e}_2' = s_{12}\bar{e}_1 + s_{22}\bar{e}_2 \end{cases}$

En godtycklig vektor $\bar{u} = x_1\bar{e}_1 + x_1\bar{e}_2 = x_1'\bar{e}_1' + x_2'\bar{e}_2'$

Skapar en matris där kolonnvektorerna är $\bar{e}_1'^{\,\prime}$ och $\bar{e}_2'$: $S = \begin{pmatrix} | & | \\ \bar{e}_1' & \bar{e}_2' \\ | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix}$.

OBS! S måste vara inverterbar för att vi ska ha ett basbyte.

$\underline{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $\underline{X} = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}$

$\underline{X} = S\underline{X}'$

Not. Sätt $E = \begin{pmatrix} \bar{e}_1 \\ \bar{e}_2 \end{pmatrix}$, $E' = \begin{pmatrix} \bar{e}_1' \\ \bar{e}_2' \end{pmatrix}$.

Om $E' = S^T E$ så är $\underline{X} = S\underline{X}'$

$\underline{X} = S\underline{X}' \Rightarrow$ (multiplikation med S^{-1} från vänster) $S^{-1}\underline{X} = \underbrace{S^{-1}S}_{I}\underline{X}' = I\underline{X}' =$ $\underline{X}'$ så $E' = S^T E \Rightarrow \underline{X}' = S^{-1}\underline{X}$.

Exempel. Har basen $\bar{e}_1, \bar{e}_2$ i planet. Varje vektor kan skrivas i flera baser. En ny bas $\bar{e}_1', \bar{e}_2'$ införs enligt.

$\begin{cases} \bar{e}_1' = \bar{e}_1 + 3\bar{e}_2 \\ \bar{e}_2' = \bar{4}e_1 + 2\bar{e}_2 \end{cases}$

Kontrollera att ovanstående är en bas genom att: $\lambda_1\bar{e}_1' + \lambda_2\bar{e}_2' = \bar{0} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$

$\bar{u} = x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 = x_1'\bar{e}_1' + x_2'\bar{e}_2'$.

Vilket samband gäller mellan x_1, x_2 och x_1', x_2'?

Lösning

$\bar{u} = x_1'(\underbrace{\bar{e}_1 + 3\bar{e}_1}_{\bar{e}_1'}) + x_2'(\underbrace{4\bar{e}_1 + 2\bar{e}_2}_{\bar{e}_2'}) = (\underbrace{x_1' + 4x_2'}_{x_1})\bar{e}_1 + (\underbrace{3x_1' + 2x_2'}_{x_2})\bar{e}_2$

Alltså: $\begin{cases} x_1 = x_1' + 4x_2' \\ x_2 = 3x_1' + 2x_2' \end{cases}$

Vi skriver om ovanstående med matriser.

$E = \begin{pmatrix} \bar{e}_1 \\ \bar{e}_2 \end{pmatrix}$, $E' = \begin{pmatrix} \bar{e}_1' \\ \bar{e}_2' \end{pmatrix}$

Date: 2014-02-13.

$\underline{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $\underline{X} = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}$

Om $E' = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} E$ så $\underline{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}}_{S(\text{basbytesmatris})} \underline{X}'$

Ortogonala matriser.

Definition (Ortogonal matris)**.** En matris $(n \times n)$ är *ortogonal* precis då dess kolonnvektorer utgör en ortonormerad bas i $\mathbb{R}^n$.

Not. Varje kolonnvektor har längd ett och är parvis ortogonala. $n_1 \cdot n_2 = 0$. $|n_1| = 1$

Exempel. Visa att matrisen $A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$ är ortogonal.

Lösning

$A = (A_1, A_2)$

$A_1 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ och $A_2 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

$|A_1|^2 = 1 \Rightarrow |A_1|^2 = 1$: $A_1 \cdot A_1 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} = \frac{1}{25}(3 \cdot 3 + (-4) \cdot (-4)) = 1$

$A_1 \cdot A_1 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} = \frac{1}{25}(3 \cdot 4 + (-4) \cdot 3) = 0$

A_1, A_2 utgör ON-bas i $\mathbb{R}^2$ så A är ortogonal.

Sats. *Följande är ekvivalent:*

i) A är ortogonal

ii) $A^T A = I$

iii) $AA^T = I$

iv) $A^{-1} = A^T$

(ii) -iv) ekvivalenta enligt förra föreläsningen)

Bevis. i) $\Leftrightarrow$ ii) $n = 3$. Låt $A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \end{pmatrix}$

$$A^T A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \cdot A_1 & A_1 \cdot A_2 & A_1 \cdot A_3 \\ A_2 \cdot A_1 & A_2 \cdot A_2 & A_2 \cdot A_3 \\ A_3 \cdot A_1 & A_3 \cdot A_2 & A_3 \cdot A_3 \end{pmatrix}$$

Så $A^T A = I \Leftrightarrow A_1 \cdot A_1 = 1, A_2 \cdot A_2 = 1, A_3 \cdot A_3$ och $A_1 \cdot A_2 = A_1 \cdot A_3 = A_2 \cdot A_1 = A_2 \cdot A_3 = A_3 \cdot A_1 = A_3 \cdot A_2 \Leftrightarrow A_1, A_2, A_3$ utgör en ON-bas $\Leftrightarrow A$ ortogonal. $\square$

Exempel. Om basbytesmatrisen S är ortogonal så gäller:

$E' = S^T E \Rightarrow \underline{X}' = S^{-1}\underline{X} = S^T\underline{X}$

Exempel. Bestäm inversen av $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

Lösning

Lösning om A ej är ortogonal: $[A|\ I] \cdots [I|\ A^{-1}]$ (dvs. gaussa).

Snabblösning: Kontrollera om A är en ortogonal matris: $|A_1| = |A_2| = |A_3| = 1$ och $A_1 \cdot A_2 = A_1 \cdot A_3 = A_2 \cdot A_3 = 0$.

A ortogonal så $A^{-1} = A^T = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Not. A ortogonal $\Leftrightarrow A^T$ ortogonal. Så A ortogonal $\Leftrightarrow$ radvektorerna i A utgör en ON-bas. (Det går alltså lika bra att kolla på kolonn- som radvektorerna).

7.7 Rang & nolldimension av matris

Exempel. $A\underline{X} = Y$

$$\underbrace{\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & 0 & 2 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 5 & 0 \end{array}\right)}_{A}, \ \underline{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}.$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 2 & -1 \\ 0 & \underbrace{0}_{x_2=s} & 0 & 0 & \underbrace{0}_{x_5=t} & 0 \end{array}\right)$$

(Tre stycken pivotelement).
$x_5 = t$
$x_4 + 2x_5 = -1 \Leftrightarrow x_4 = -1 - 2x_5 = -1 - 2t$
$x_3 - x_4 - x_5 = 3 \Leftrightarrow x_3 = 2 - t$
$x_2 = s$
$x_1 - 2x_2 - x_3 + x_5 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 2 + 2s - 2t$

$$\underline{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\underline{X}_p} + s \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\underline{X}_{h_1}} + t \underbrace{\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\underline{X}_{h_2}}, s, t \in \mathbb{R}$$

$\underline{X}_p$ är <u>en</u> lösning till $A\underline{X} = Y$.
$s \cdot \underline{X}_{h_1} + t \cdot \underline{X}_{h_2}$ ger <u>alla</u> lösningar till $A\underline{X} = 0$.
Vi radreducerade A och fick G:

$$G = \begin{pmatrix} \boxed{1} & -2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Antalet *parametrar* är antalet kolonner-antal pivotelement. $5 - 3 = \boxed{2}$

Definition (Kolonnrummet)**.** För matrisen $A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_n \end{pmatrix}$ definierar vi *kolonnrummet* som mängden av alla linjärkombinationer av $A_1, A_2, \dots, A_n$:

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 A_1 + x_2 A_2 + \dots + x_n A_n.$$ Så kolonnrummet till A består av alla Y sådana att $A\underline{X} = Y$ har lösning.

Definition (Rang)**.** Rangen låter vi vara maximala antalet linjärt oberoende vektorer bland $A_1, A_2, \dots, A_n$. (Dvs. antalet som ej är $\parallel$.) (Antalet pivotelement)

Betecknas rang A.

Definition (Nollrummet)**.** Nollrummet för A är alla $\underline{X}$ sådana att $A\underline{X} = 0$.

Definition (Nolldimensionen)**.** Maximalt antal linjärt oberoende lösningar till $A\underline{X} = 0$ kallas *nolldimensionen. (Antalet parametrar, t.ex. s, t ger 2)*

Betecknas nolldim A.

Lemma. *Om vi har radreducerat (dvs. gaussat) A till G så gäller:*
rang A = rang G
nolldim A = nolldim G

Sats. *rang A + nolldim A = antalet kolonner i A*

Exempel. I exemplet ovan $A\underline{X} = 0$ hade lösningarna $s\underline{X}_{h_1} + t\underline{X}_{h_2}$ så nolldim $A = 2$ (räkna antal parametrar).

Satsen ovan ger: rang $A = \underbrace{5}_{\#\text{ kolonner}} - \underbrace{2}_{\text{nolldim}} = 3$.

Metod för att ta fram rang respektive nolldimension av A.

(1) Radreducera (gaussa) A till G.
(2) Räkna antalet pivotelement = rang A (=rang G)
(3) Antalet parametrar till $A\underline{X} = 0$ ger nolldimensionen till A

Metod bas till nollrummet.

(1) Lös $A\underline{X} = 0$
(2) Bas ges av vektorerna framför (bakom) parametrarna, dvs $\underline{X}_{h_1}$ och $\underline{X}_{h_2}$ i exemplet.