SAMMANFATTNING KOMPLEXA TAL (KAP. 6)

TOBIAS MÖRTLUND

1. Räkneregler, definitioner och satser

- Absolutbelopp ("avståndet till origo") $|a+bi| = \sqrt{a^2+b^2}$
  - $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$
  - $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$
- de Moivres formel: $(re^{i\theta})^n = re^{in\theta}$
- Eulers formler: $\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ och $\sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$
  - Bevis: $\boxed{1}$ $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ och $\boxed{2}$ $e^{-i\theta} = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) = \cos\theta - i\sin\theta$ (eftersom cos jämn fkn. sin udda fkn.
  - Sätter $\boxed{1} + \boxed{2} = e^{i\theta} + e^{-i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta + \cos\theta - i\sin\theta = \cos\theta + \cos\theta = 2\cos\theta$. Får alltså
    - $\frac{1}{2}\cos\theta = e^{i\theta} + e^{-i\theta} = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ #
  - Sätter $\boxed{1} - \boxed{2} = e^{i\theta} - e^{-i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta - (\cos\theta - i\sin\theta) = 2i\sin\theta$. Får alltså
    - $\frac{1}{2i}\sin\theta = e^{i\theta} - e^{-i\theta} = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$#.
- Rötter
  - $a+bi = \text{rot} \Leftrightarrow z-(a+bi) = 0$. "Z minus roten är noll"
  - $z-(a+bi) = 0 \Leftrightarrow z-(a-bi) = 0$. "Konjugatet till roten är också en rot."

2. Metoder

- Division: förläng med nämnarens konjugat

2.1. Från rektangulär till polär form.

Från $z = a+bi$ till $z = re^{i\theta}$.

(1) $r = |z| = \sqrt{a^2+b^2}$
(2) $z = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$, för att få en punkt $\left(\frac{a}{\dots}, \frac{b}{\dots}\right)$ som ligger på enhetscirkeln.
(3) Söker nu vinkel sådant att $\cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ och $\sin\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

2.2. Ekv. av typen $z^2 = a+bi$.

(1) Ansätt $z = c+di$.
(2) Jämför real- och imaginärdel.
(3) Hjälpekvation: $\left|z^2\right| = |a+bi| \Leftrightarrow c^2+d^2 = \sqrt{a^2+b^2}$

Date: 2014-11-14.

2.3. Ekv. av typen $(a+bi)z^2 + (c+di)z + e + fi = 0$.

(1) Dividera allt med $(a+bi)$
(2) Kvadratkomplettera
(3) Sätt $w =$ det innanför kvadraten
(4) Få en ny ekvation av typen $w^2 + \cdots = 0$. Lös den med metod ovan.
(5) Lös därefter $w_{1,2} =$ det innanför kvadraten

2.4. Ekvation av typen $z^n = a + bi$.

(1) Använd de Moivres formel och få $re^{in\theta} = a + bi$
(2) Skriv om $a + bi$ till polär form.
(3) Vinkeln som fås fram α ska vara samma som $n\theta + 2k\pi, \quad k$ heltal.
(4) Får fram $\theta = \frac{n}{\alpha} + \frac{2\pi}{\alpha}k$
(5) Jämför absolutbelopp.

2.5. Känner till en rot i ett polynom.

(1) Multiplicera roten med dess konjugat (som också är en rot)
(2) Dividera polynomet med produkten.
(3) Får fram resten av rötterna.

3. Från B1

Tabell 1. Standardvärden för trig.fkn.

α	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$\cos(\alpha)$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$
$\sin(\alpha)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\tan(\alpha)$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$

3.1. Binomialkoefficienten.

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \tag{1}$$

3.2. Binomialutveckning.

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot b^k \tag{2}$$