S3

4.40

En ljusstråle utgår från punkten $P_1 : (3, -2, -1)$ och reflekteras i planet $\pi : x - 2y - 2z = 0$ och går sedan genom punkten $P_2 : (4, -1, -6)$. I vilken punkt Q träffade ljusstrålen planet?

Lösning.

(1) Sätt O som reflektionspunkten i planet.
(2) Låt P_3 vara *spegling* av P_2 i π.
  (a) $\vec{RP_2}$ är $\vec{OP_2}$ projicerad på $\bar{n}$.
  (b) Enligt planets ekvation fås: $\bar{n} = (1, -2, -2)$
  (c) $\vec{OP_3} = \vec{OP_2} - 2\vec{RP_2} = \vec{OP_2} - 2\frac{\vec{OP_2}\cdot\bar{n}}{\bar{n}\cdot\bar{n}}\bar{n} = (4, -1, -6) - 2\frac{(4,-1,-6)\cdot(1,-2,-2)}{(1,-2,-2)\cdot(1,-2,-2)}(1, -2, -2) = (0, 7, 2)$
(3) $P_3 : (0, 7, 2)$
(4) Linjen mellan P_1 och P_3
  (a) Riktningsvektor $\bar{v} = \vec{P_1P_3} = (0, 7, 2) - (3, -2, -1) = (-3, 9, 3) = (-1, 3, 1)$
  (b) Linjen på parameterform: $l : (x, y, z) = (3, -2, -1) + t(-3, 9, 3)$.
(5) Q ges som skärningen mellan π och l
  (a) Sätt in uttryck för l i ekvationen för π: $\underbrace{(3 - 3t)}_{x} - 2\underbrace{(-2 + 9t)}_{y} - 2\underbrace{(-1 + 3t)}_{z} = 0 \Leftrightarrow 9 - 27t = 0 \Leftrightarrow t = 1/3$
  (b) Sätt in $t = 1/3$ i l. Detta ger: $(x, y, z) = (3, -2, -1) + \frac{1}{3}(-3, 9, 3) = (2, 1, 0)$
(6) Svar: skärningen sker i $Q : (2, 1, 0)$.

5.16

Given HON-bas: $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$. Introducera en ny HON-bas: $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$ så att $\hat{e}_3 \perp \pi_1 : x - y - z = 3$ och $\hat{e}_1 \parallel \pi_2 : x + y + 2z = 5$. Ange koordinater för $(1, 2, 3) = 1\bar{e}_1 + 2\bar{e}_2 + 3\bar{e}_3$ i den nya basen.

Lösning.

(1) $\hat{e}_3 \perp \pi_1 \Rightarrow \hat{e}_3 \parallel n_1$ där n_1 är normalen till planet π_1.
  (a) $\bar{n}_1 = (1, -1, -1)$
  (b) $\hat{e}_3 = \frac{1}{|\bar{n}_1|}\bar{n}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, -1)$
(2) $\hat{e}_1$ är ortogonal mot både normalen n_2 till π_2 och mot $\bar{n}_1$, dvs. $\hat{e}_3$.
  (a) $\hat{e}_1 \parallel (\bar{n}_2 \times \bar{n}_1)$
  (b) $\bar{n}_2 = (1, 1, 2)$
  (c) $\bar{n}_2 \times \bar{n}_1 = (1, 1, 2) \times (1, -1, -1) = (1, 3, -2)$
  (d) $\hat{e}_1 = \frac{1}{|\bar{n}_2 \times \bar{n}_1|}\bar{n}_2 \times \bar{n}_1 = \frac{1}{\sqrt{14}}(1, 3, -2)$

Date: 2014-02-14.

(3) $\hat{e}_2 = \hat{e}_3 \times \hat{e}_1$ (varför inte $\hat{e}_1 \times \hat{e}_3$?)
   (a) "Minnesregel": $\hat{e}_3 = \hat{e}_1 \times \hat{e}_2$. Flytta bakåt $\hat{e}_2$ och då ska allt annat knuffas framåt: $\hat{e}_2 = \hat{e}_3 \times \hat{e}_1$
   (b) $\hat{e}_3 \times \hat{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,-1) \times \frac{1}{\sqrt{14}}(1,3,-2) = \frac{1}{\sqrt{42}}(1,-1,-1) \times (1,3,-2) = \frac{1}{\sqrt{42}}(5,1,4)$
   (c) $\hat{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{42}}(5,1,4)$
(4) Har nu fått alla värden på den nya basen i den gamla.
(5) För att beräkna koordinaterna används en sats i kapitel 4:
   (a) $\hat{x}_k = \hat{e}_k \times \bar{u}$, (där $\bar{u} = \hat{x}_1\hat{e}_2 + \hat{x}_2\hat{e}_2 + \hat{x}_3\hat{e}_3$)
   (b) $\bar{u} = (1,2,3)$
   (c) $\hat{x}_1 = \hat{e}_1 \cdot \bar{u} = \frac{1}{\sqrt{14}}(1,3,-2) \cdot (1,2,3) = \frac{1}{\sqrt{14}}(1+6-6)$
   (d) Osv...

7.26

Lös matrisekvationen A$\underline{\overline{X}}$B=C

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Lösning.

(1) Vilken storlek har $\underline{\overline{X}}$?
   (a) 3×2
(2) För att få bort A, multiplicera med A^{-1}, om den existerar från vänster på VL och HL.
   (a) $A\underline{\overline{X}}B = C \Leftrightarrow \underbrace{A^{-1}A}_{I}\underline{\overline{X}}B = A^{-1}C \Leftrightarrow \underline{\overline{X}}B = A^{-1}C$
(3) För att få bort B, multiplicera med B^{-1} från höger.
   (a) $\underline{\overline{X}}B = A^{-1}C \Leftrightarrow \underline{\overline{X}}\underbrace{BB^{-1}}_{I} = A^{-1}CB^{-1} \Leftrightarrow \underline{\overline{X}} = A^{-1}CB^{-1}$
(4) A inverterbar?
   (a) $[A|I] \sim \dots [I|A^{-1}]$
   (b) $\left[\begin{array}{ccc|c|ccc} 1 & 1 & 0 & & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & \underbrace{\begin{matrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{matrix}}_{A^{-1}} \\ 0 & 0 & 1 & \end{array}\right]$
(5) B inverterbar?
   (a) Ja, pss
(6) Därefter använd formeln $\underline{\overline{X}} = A^{-1}CB^{-1}$
   (a) $ABC = (AB)C = A(CB)$

7.28

Lös $A\underline{\overline{X}} + \underline{\overline{X}}A = B$, där $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 6 & -5 \end{pmatrix}$

Lösning.

(1) Storlek på $\underline{X}$?
    (a) 2×2
(2) $\underline{X} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$
(3) $A\underline{X} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_3 & x_2 + 2x_4 \\ 4x_1 + 3x_3 & 4x_2 + 3x_4 \end{pmatrix}$
(4) $\underline{X}A = \dots$
(5) Detta ger ett linjärt ekvationssystem.

5.24

En *liksidig* triangel ligger i planet $\pi : x + y + z = 3$ och har hörn i punkterna $P_1 : (1, 1, 1)$ och $P_2 : (1, 2, 0)$. Bestäm alla möjliga lägen för det tredje hörnet.

Lösning.

(1) På hur många ställen kan den tredje punkten läggas?
    (a) Två
(2) Koordinaterna för det okända hörnet är $P_3 : (x, y, z)$
(3) Vektorn som bildas mellan punkten P_1 och P_3 kallas för $\bar{u} = (x - 1, y - 1, z - 1)$
(4) Vektorn som bildas mellan P_1 och P_2 kallas för $\bar{v}$
(5) Vinkeln mellan $\bar{u}$ och $\bar{v}$ är $\pi/3$
(6) Vet att $\bar{u} \perp \bar{n}$ där $\bar{n}$ är normalen till π.
(7) Längden av $\bar{u} \cdot |\bar{v}| = \sqrt{0^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$
(8) $|\bar{u}| = 2$
(9) $\bar{v} = (1, 2, 0) - (1, 1, 1) = (0, 1, -1)$
(10) $\bar{u} \cdot \bar{v} = (x - 1, 4 - 1, z - 1) \cdot (0, 1, -1) = y - 1 - (z - 1) = y - z$
(11) $\bar{u} \cdot \bar{v} = |\bar{u}| \cdot |\bar{v}| \cdot \cos[\bar{u}, \bar{v}] = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cos \frac{\pi}{3} = 1$
(12) $y - z = 1$
(13) $\bar{u} \perp \bar{n} \Rightarrow 0 = \bar{u} \cdot \bar{n} = (x - 1, y - 1, z - 1) \cdot (1, 1, 1) = x - 1 + y - 1 + z - 1 = x + y + z - 3$
(14) $2 = |\bar{u}|^2 = (x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2$
(15) Får ekvationssystemet: $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ y - z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = t \\ y = 1 + z = 1 + t \\ x = 3 - y - z = 2 - 2t \end{cases}$
(16) $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 2$ så $(2 - 2t - 1)^2 + (1 + t - 1)^2 + (t - 1)^2 = 2 \Leftrightarrow 6t^2 - 6t + = 0 \Leftrightarrow 6(t^2 - t) = 0 \Leftrightarrow 6(t(t - 1)) = 0$. $t = 0$ eller $t = 1$
(17) $t = 0$ ger $(x, y, z) = (2, 1, 0)$
(18) $t = 1$ ger $(x, y, z,) = (0, 2, 1)$
(19) Svar de två punkterna är $(2, 1, 0)$ och $(0, 2, 1)$.