S4 - 5.5, 7.37, 8.7, 8.18, 8.24 & 8.34

Övning (5.5)**.** Förenkla $(\bar{u}+\bar{v})\cdot((\bar{u}+2\bar{v})\times(\bar{u}-2\bar{v}))$

Lösning

$= (\bar{u}+\bar{v})\cdot(\underbrace{\bar{u}\times\bar{u}}_{=0} - 2\bar{u}\times\bar{v}\underbrace{+2\bar{v}\times\bar{u}}_{=-2\bar{u}\times\bar{v}} - \underbrace{4\bar{v}\times\bar{v}}_{=0}) = -4\bar{u}\cdot(\underbrace{\bar{u}\times\bar{v}}_{\perp\bar{u}}) - 4\bar{v}\cdot(\underbrace{\bar{u}\times\bar{v}}_{\perp\bar{v}}) = 0$

Övning (7.37)**.** a) Vad menas med rangen av en matris?

b) Bestäm för alla $a\in\mathbb{R}$ rangen av: $\begin{pmatrix}1 & -a & -2 & a\\ 2 & 0 & a & a\\ 3 & a & -a & a\end{pmatrix}$

Lösning

a) Se boken

b) Rangen kan som mest vara tre (tre element/kolonn). Hur många oberoende kolonnvektorer har vi?

Radeliminera och räkna antalet pivotelement. Ser att första och sista kolonnen är linjärt oberoende. Alltså är rang ≥ 2. OBS! Var uppmärksam vid division med a

$\begin{pmatrix}1 & -a & -2 & a\\ 2 & 0 & a & a\\ 3 & a & -a & a\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & -a & -2 & a\\ 0 & 2a & a+4 & -a\\ 0 & 0 & -3a-2 & 0\end{pmatrix}$. Har tre pivotelement$\Leftrightarrow$ rang 3, men ej om $a=0$ eller $3-a-2=0 \Leftrightarrow a=-2/3$, då är rang $=2$.

Övning (8.7)**.** Vid ortogonal projektion på linjen $2x=2y=-z$ hamnar (x_1,x_2,x_3) på (y_1,y_2,y_3). Finn avbildningsmatrisen $\left(\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\right)$

Lösning

Linjen $2x=2x=-z$ kan ses som skärning mellan plan:

$\begin{cases}2x=2y\\ 2y=-z\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x-2y=0\\ 2y+z=0\end{cases}$

Sätt (t.ex) $z=t$ då är $y=2y=-z=-t \Leftrightarrow y=-\frac{t}{2}$, $2x=-z=t\Leftrightarrow x=-\frac{t}{2}$, $(x,y,z)=t(-1/2,-1/2,1)$. Linjen går genom origo.

Inför linjens riktningsvektor $\bar{v}=(-1/2,-1/2,1)$. Välj en godtycklig punkt på linjen $P_1:(y_1,y_2,y_3)$. Punkten som projiceras är $P_0:(x_1,x_2,x_3)$. Origo, O ligger på linjen.

$(y_1,y_2,y_3)=\vec{OP_1}=\frac{\vec{OP_0}\cdot\bar{v}}{\bar{v}\cdot\bar{v}}\bar{v}=\frac{1}{3}(\frac{x_1}{2}+\frac{x_1}{2}-x_3, \frac{x_1}{2}+\frac{x_2}{2}-x_3, -x_1-x_2+2x_3)$

På matrisform:

$$\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}\frac{x_1}{2}+\frac{x_1}{2}-x_3\\ \frac{x_1}{2}+\frac{x_2}{2}-x_3\\ -x_1-x_2+2x_3\end{pmatrix}=\underbrace{\frac{1}{3}\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1\\ -1 & -1 & 2\end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

Övning (8.24)**.** Bestäm rangen för matrisen i 8.7.

Date: 2014-02-21.

Lösning
Ett, eftersom rangen är dimensionen för det som träffas, det är en linje, som har dimensionen ett.

Övning (8.18)**.** $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ linjär. Ange avbildningsmatris A för F om
$(1, -2, 1) \to (0, 0, 0)$
$(1, 0, -1) \to (1, 0, -1)$
$(0, 1, 0) \to (0, 1, 0)$
Lösning
$A\underline{\overline{X}} = Y$

$$\underline{\overline{X}} = \begin{pmatrix} | & | & | \\ \bar{u}_1 & \bar{u}_2 & \bar{u}_3 \\ | & | & | \end{pmatrix}, \; Y = \begin{pmatrix} | & | & | \\ \bar{v}_1 & \bar{v}_2 & \bar{v}_3 \\ | & | & | \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{A \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}}_{\underline{\overline{X}}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}}_{Y}$$

$A\underline{\overline{X}} = Y \Leftrightarrow A\underbrace{\underline{\overline{X}}\,\underline{\overline{X}}^{-1}}_{I} = Y\underline{\overline{X}}^{-1}$, om $\underline{\overline{X}}^{-1}$existerar. Kontrollerar om $\underline{\overline{X}}$ är inverterbar:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{I} & \underbrace{\begin{matrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix}}_{\underline{\overline{X}}^{-1}} \end{array}\right)$$

$$A = Y\underline{\overline{X}}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Alternativ lösning
(Kan användas om $\underline{\overline{X}}$ ej är inverterbar.)

Första kolonnen i A: $A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Andra kolonnen i A: $A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow$ Fick i uppgiften

Tredje kolonnen i A: $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

För att få bilden av $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ skriver vi $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Använda linjäriteten. $A\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = aA\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} + bA\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} + cA\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} +$ $b\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$. Söker talen a, b, och c.

Genom att testa olika värden på a, b, och c fås $b = 1/2$, $a = 1/2$ och $c = 1$. (Kan också lösas genom att gaussa.)

Sätter in värdena på a, b, c ovan och får första kolonnen i A: $A\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/2\\1\\-1/2\end{pmatrix}$

Bilden av $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$: $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$: $a = 1/2$, $b = -1/2$, $c = 1$

Tredje kolonnen:$A\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = Aa\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} + Ab\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} + Ac\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1/2\\1\\1/2\end{pmatrix}$

Övning (8.34)**.** Den linjära avbildningen $\begin{cases} y_1 = \frac{1}{5}(3x_1 - 4x_2) \\ y_2 = \frac{1}{5}(-4x_1 - 3x_2) \end{cases}$ betyder spegling i en viss linjer genom origo. Bestäm denna linje.

Lösning

En punkt på linjen speglar på sig själv.

Linjen l består av alla punkter som avbildas på sig själv, dvs. de punkter (x_1, x_2) sådana att $\begin{cases} x_1 = \frac{1}{5}(3x_1 + 4x_2) \\ x_2 = \frac{1}{5}(-4x_1 - 3x_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$

Svar: Linjen har ekvationen $x_1 + 2x_2 = 0$.