FMA420 S2

3.25

Linjen l går genom $(1,2,5)$ och skär linjen $(x,y,z)=(2,3,1)+t(3,2,2)$ och är parallell med yz-planet. Bestäm en ekvation till l.

Lösning. Vad är yz-planet? Planet som ligger längst med y- och z-axlarna (dvs. $x=0$)

(1) Vet att linjen är parallell med yz-planet dvs. x ska vara konstant.
  - Eftersom går genom punkten $(1,2,5)$ är $x=1$.

(2) Vid vilket t ska den skära linjen?
  - $(x,y,z)=(2,3,1)+t(3,2,2)=(1,?,?)$, dvs $1=2+3t \Leftrightarrow t=\frac{-1}{3}$.

(3) $t=\frac{-1}{3} \Rightarrow (x,y,z)=(1,\frac{7}{3},\frac{1}{3})$

(4) Återstår endast en riktningsvektor
  - $(1,2,5)-(1,\frac{7}{3},\frac{1}{3})=\left(\underbrace{0}_{\text{Krav enligt ovan}},\frac{-1}{3},\frac{14}{3}\right)$.
  - För syn skull skriver vi om ovanstående till $(0,-1,14)$ (samma riktning som ovanstående vektor, längden oväsentligt)

(5) l ges nu av $l:(x,y,z)=(\underbrace{1,2,5}_{\text{en godtycklig punkt på linjen}})+t(0,-1,14)$

4.35

$\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ i rummet. $|\bar{u}|=5$, $|\bar{v}|=2$, $|w|=1$. $[\bar{u},\bar{v}]=\frac{\pi}{3}$.
Hur ska vinkeln mellan $\bar{u}$ och $\bar{v}$ väljas så att $|\bar{u}+2\bar{v}+\bar{w}|=|\bar{u}+\bar{v}+2\bar{w}|$?

Lösning.

Definition (Skalärprodukt)**.** $\bar{x}\cdot\bar{y}=|\bar{x}|\cdot|\bar{y}|\cdot\cos[\bar{x},\bar{y}]$

$$|\bar{x}|=|\bar{y}| \Rightarrow |\bar{x}|^2=|\bar{y}|^2$$
$$|\bar{u}+2\bar{v}+\bar{w}|^2=|\bar{u}+\bar{v}+2\bar{w}|^2 \Leftrightarrow (\underbrace{\bar{u}}_{x_1}+\underbrace{\bar{u}}_{x_2}+\underbrace{\bar{w}}_{x_3})\cdot(\underbrace{\bar{u}}_{y_1}+\underbrace{2\bar{v}}_{y_2}+\underbrace{\bar{w}}_{y_3})=$$
$$\bar{u}\cdot\bar{u}+2\bar{u}\cdot\bar{v}+\bar{u}\bar{w}+2\bar{u}\cdot\bar{v}+4\bar{v}\cdot\bar{v}+2\bar{v}\cdot\bar{w}+\bar{u}\cdot\bar{w}+2\bar{v}\cdot\bar{w}+\bar{w}\cdot\bar{w}=$$
$$\bar{u}\cdot\bar{u}+\bar{u}\cdot\bar{v}+2\bar{u}\cdot\bar{w}+\bar{u}\cdot\bar{v}+\bar{v}\cdot\bar{v}+2\bar{u}\cdot\bar{w}+2\bar{v}\cdot\bar{w}+4\bar{w}\cdot\bar{w} \Leftrightarrow$$
$$2\bar{u}\cdot\bar{v}-2\bar{u}\cdot\bar{w}+3\bar{v}\cdot\bar{v}-3\bar{w}\cdot\bar{w}=0 \Leftrightarrow$$
$$\underbrace{2|\bar{u}|\cdot|\bar{v}|\cdot\cos[\bar{u},\bar{v}]}_{20\cdot\cos[\bar{u},\bar{v}]}\underbrace{-2|\bar{u}|\cdot|\bar{w}|\cdot\cos[\bar{u},\bar{w}]}_{-10\cdot\frac{1}{2}}\underbrace{+3|\bar{v}|^2}_{+12}\underbrace{-3|\bar{w}|^2}_{-3}=0 \Leftrightarrow$$
$$20\cos[\bar{u},\bar{v}]=-4 \Leftrightarrow \cos[\bar{u},\bar{v}]=-\frac{4}{20}=-\frac{1}{5} \Leftrightarrow [\bar{u},\bar{v}]=\arccos\left(\frac{-1}{5}\right)$$

Date: 7 februari 2014.

3.28

Visa att linjerna: $l_1 : \begin{cases} x = 2+t \\ y = 3+2t \\ z = 1+3t \end{cases}$ och $l_2 : \begin{cases} x = 3-t \\ y = -5+3t \\ z = 2-2t \end{cases}$ skär varandra.
Bestäm en ekvation för det plan som innehåller l_1 och l_2.

Lösning.

(1) Skär varandra $\Leftrightarrow$ innehåller samma punkt $(x_1, y_1, z_1) = (x_2, y_2, z_2)$

(a) $\begin{matrix} x: \\ y: \\ z: \end{matrix} \begin{cases} 2+t = 3-s & (a) \\ 3+2t = -5+3s & (b) \\ 1+3t = 2-2s & (c) \end{cases} \Leftrightarrow$

(b) $\begin{cases} s+t = 1 & (a) \\ -3s+2t = -8 & (b) \\ 2s+3t = 1 & (c) \end{cases} \Leftrightarrow$

(c) $\begin{cases} s+t = 1 & (a) \\ st = -5 & (b' = 3a+b) \\ t = -1 & (c' = -2a+c) \end{cases} \Leftrightarrow$

(d) $\begin{cases} s+t = 1 & (a) \\ t = -1 & (b'' = -5c+b) \\ 0 = 0 & (c') \end{cases}$

(e) så $\begin{cases} s = 2 \\ t = -1 \end{cases}$

(f) Linjerna skär varandra i punkten $(1, 1, -2)$

(2) Planets ekvation på parameterform.

(a) Riktningsvektorer $\bar{v}_1 = (1, 2, 3)$ och $\bar{v}_2 = (-1, 3, -2)$

(b) Planets ekvation blir alltså: $\begin{matrix} x: \\ y: \\ z: \end{matrix} \begin{cases} 1+t-s \\ 1+2t+3s \\ -2+3t-2s \end{cases} , s, t \in \mathbb{R}$

(3) Vi använder kryssprodukt på $\bar{v}_1$ och $\bar{v}_2$.

(a) $\bar{n} = (1, 2, 3) \times (-1, 3, -2) = (-13, -1, 5)$.

(4) Det ger planets ekvation: $\pi : -13x - y + 5z + d = 0$

(5) Lägg in en punkt som ligger i planet för att få d:

(a) Väljer punkten $(1, 1, -2)$

(b) $-13 \cdot 1 - 1 \cdot 1 + 5 \cdot (-2) + d = 0 \Leftrightarrow d = 24$

(6) Planets fullständiga ekvation blir alltså: $-13x - y + 5z + 24 = 0$

4.43

- Riktningsvektor $(-2, 4, 1)$
- ON-bas.
- Har xy-planet
- Kvadratiskt platta med hörn i $(1, 1, 1)$, $(3, -2, 7)$, $(4, 7, 3)$.
- Bestäm hörnen för skuggorna i planet

Lösning.

(1) xy-planet har $z = 0$

(2) Hur ta reda på vilket hörn som är vilket? Bestäm avståndet mellan punkterna!

  (a) Avstånd: $|(1,1,1)-(3,-2,7)| = \sqrt{(1-3)^2 + (1-(-2))^2 + (1-7)^2} = \sqrt{49} = 7$

  (b) Avstånd: $|(1,1,1)-(4,7,3)| = 7$

(3) Fjärde punkten? Ska ha samma riktning som $\bar{\bar{v}} = (4-1, 7-1, 3-1)$

  (a) $\bar{u} = (a, b, c,) - (3, -2, 7)$.

  (b) $(a, b, c) - (3, -2, 7) = (4, 7, 3) - (1, 1, 1) \Leftrightarrow (a, b, c) = (6, 4, 9)$

  (c) Den fjärde punkten är alltså $(6, 4, 9)$

(4) Vilka punkter avbildas hörnen på?

  (a) $(1, 1, 1)$

    (i) Vi söker den punkt i xy-planet som linjen $(1,1,1) + t(-2,4,1)$ skär

    (ii) För den punkten är $z = 0 \Rightarrow 1 + 1t = 0 \Leftrightarrow t = -1$

    (iii) Punkten blir alltså: $(1,1,1) - (-2,4,1) = (3,-3,0)$

  (b) Pss. med resten av punkterna

5.6A

Visa: $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w} = \bar{0}$ så är $\bar{u} \times \bar{v} = \bar{v} \times \bar{w} = \bar{w} \times \bar{u}$

Lösning. $\bar{u} = -\bar{v} - \bar{w}$ så $\bar{u} \times \bar{v} = (-\bar{v} - \bar{w}) \times \bar{v} = -\overbrace{\bar{v} \times \bar{v}}^{0} - \bar{w} \times \bar{v} = \bar{v} \times \bar{w}$. De andra formlerna visas analogt.

5.6B

Visa: $\frac{|\bar{u}|}{\sin\alpha} = \frac{|\bar{v}|}{\sin\beta} = \frac{|\bar{w}|}{\gamma}$

Lösning.

(1) Här är $\bar{u} + \bar{v} + \bar{w} = 0$

(2) Då är enligt 5.6A $\bar{u} \times \bar{v} = \bar{v} \times \bar{w}$.

(3) Längderna också lika: $|\bar{u} \times \bar{v}| = |\bar{v} \times \bar{w}|$.

(4) $|\bar{u}| \cdot |\bar{v}| \sin[\bar{u}, \bar{v}] = |\bar{v}| \cdot |\bar{w}| \sin[\bar{v}, \bar{w}]$

(5) $[\bar{u}, \bar{v}] + \gamma = \alpha$ (ligger i samma hörn)

(6) $sin[\bar{u}, \bar{v}] = \sin\gamma$

(7) $\sin[\bar{v}, \bar{w}] = \sin\alpha$

(8) $|\bar{u}| \cdot \sin\gamma = |\bar{w}| \times \sin\alpha$

(9) $\frac{|\bar{u}|}{\sin\alpha} = \frac{|\bar{w}|}{\sin\gamma}$