F9 - LINJÄRA AVBILDNINGAR

Funktionsbegreppet

Definition (Funktion/avbildning)**.** Låt M_1 och M_2 vara mängder. En *funktion* eller *avbildning* $F : M_1 \to M_2$ är en regel som till varje $x \in M_1$ ordnar precis *ett* element $y \in M_2$. Vi skriver $y = F(x)$.

Exempel. Har sett $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ t.ex $f(x) = \sin(x), x \in \mathbb{R}$.

Exempel. Låt $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara ortogonal projektion i planet $\pi : x - y + z = 0$. Vad finns det för samband mellan koordinaterna för projektionen $Q : (y_1, y_2, y_3)$ och den projicerade punkten $P : (x_1, x_2, x_3)$?

Lösning

OBS! $O \in \pi$

(1) $\vec{OQ} = (y_1, y_2, y_3)$

(2) $\vec{OQ} = \vec{OP} - \vec{QP}$

(3) $\vec{OQ} = \vec{OP} - \frac{\vec{OP} \cdot \bar{n}}{\bar{n} \cdot \bar{n}} \bar{n}$

(4) $\vec{OQ} = \frac{1}{3}(2x_1 + x_2 - x_3,\ x_1 + 2x_2 + x_3,\ -x_1 + x_2 + 2x_3)$

(5) Kan också skrivas som ett matrissamband $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 - x_3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 \end{pmatrix} =$

$$\underbrace{\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_{A\text{:Avbildningsmatrisen för avbildningen}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Not. Här är $A^2 = A$. Varför? Det är en projicering, en punkt som projiceras i sitt plan blir samma punkt

Exempel. Spegling med samma punkt som ovan i samma plan.

Lösning

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}}_{A\text{;avbildningsmatris för spegling i } \pi} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Not. $A^2 = I$

Exempel. Ortogonal projektion på $\pi : x - y + z - 1 = 0$.

Lösning

OBS går ej genom origo!

Samma räkningar ger:

Date: 2014-02-17.

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \underbrace{\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{Uppstår p.g.a. ej gnm origo! } \parallel \bar{n}}$$

Definition (Linjär avbildning)**.** Avbildningen $F : V_1 \to V_2$ kallas *linjär* om:

(1) $F(\bar{u}_1 + \bar{u}_2) = F(\bar{u}_1) + F(\bar{u}_2) \quad \forall u_1, u_2 \in v_1$
(2) $F(\lambda\bar{u}) = \lambda F(\bar{u}) \quad ,\forall\lambda \in \mathbb{R}$ och $\forall\bar{u} \in V_1$

Exempel. Matrismultiplikation är linjär, ty:
$A(\underline{X}_1 + \underline{X}_2) = A\underline{X}_1 + A\underline{X}_2$
$A(\lambda\underline{X}) = \lambda A\underline{X}$

Not. Härur följer att ortogonal projektion på plan genom origo och spegling i plan genom origo är linjära avbildningar.

Exempel. Projektion på plan som ej går genom origo är ej linjär.

$$F(\underline{X}) = A\underline{X} + \tfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$F(\underline{X}_1 + \underline{X}_2) = A(\underline{X}_1 + \underline{X}_2) + \tfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = A\underline{X}_1 + A\underline{X}_2 + \tfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$F(\underline{X}_1) + F(\underline{X}_2) = A\underline{X}_1 + \tfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + A\underline{X}_2 + \tfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ - \\ 1 \end{pmatrix} = F(\underline{X}_1 + \underline{X}_2) + \tfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Så F ej linjär!

Exempel. $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $F(\bar{v}) = \bar{u} \cdot \bar{v}$ ($\bar{u}$ fix vektor i $\mathbb{R}^3$)
$F(\bar{v}_1 + \bar{v}_2) = \bar{u} \cdot (\bar{v}_1 + \bar{v}_2) = \bar{u} \cdot \bar{v}_1 + \bar{u} \cdot \bar{v}_2 = F(\bar{v}_1) + F(\bar{v}_2)$
$F(\lambda\bar{v}) = \bar{u} \cdot (\lambda\bar{v}) = \lambda(\bar{u} \cdot \bar{v}) = \lambda F(\bar{v})$

Exempel. $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. $F(\bar{v}) = \bar{u} \times \bar{v}$

Exempel. Kontinuerliga och deriverbara funktioner utgör vektorrum
D : funktion $\to$ funktion
$(Df)(x) = f^{'}(x)$
$(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$, $(\lambda f)'(x) = \lambda f'(x)$
–

Exempel. Projektionsmatrisen: $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Radreducera projektionsmatrisen...
Detta ger rang = 2 och nolldim = 1
Allt parallellt med normalen avbildas på nollan. Vi projicerar på planet som är tvådimensionell därför är rangen två.

Exempel. Speglingsmatrisen: $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Radreducera...
rang = 3. Bilden är tredimensionell så rangen är tre.
och nolldim = 0

Sats (Linjära avbildningar)**.** ** En avbildning F är linjär $\Leftrightarrow$ den ges som multiplikation med matris.*

** Kolonnvektorerna i avbildningsmatrisen ges, i förekommande fall, av bilden av basvektorerna:*

$$A = \begin{pmatrix} | & & | \\ F(\bar{e}_1) & \dots & F(\bar{e}_n) \\ | & & | \end{pmatrix}$$

Bevis. (3×3)

$\Rightarrow$ Antag att $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ är linjär.

Det gäller $(y_1, y_2, y_3) = F(\bar{x}) = F(x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + x_3\bar{e}_3) \underbrace{=}_{\text{F linjär}} F(x_1\bar{e}_1) + F(x_2\bar{e}_2) + F(x_3\bar{e}_3) \underbrace{=}_{\text{F linjär}} x_1F(\bar{e}_1) + x_2F(\bar{e}_2) + x_3F(\bar{e}_3)$

Dvs. $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \big(x_1F(\bar{e}_1) + x_2F(\bar{e}_2) + x_3F(\bar{e}_3)\big) = \begin{pmatrix} | & | & | \\ F(\bar{e}_1) & F(\bar{e}_2) & F(\bar{e}_3) \\ | & | & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ $\square$

Exempel. Använd satsen för att ta fram avbildningsmatrisen för F :ortogonal projektion i $x - y + z = 0$ (dvs. samma avbildning som ovan.)

Lösning

Vi beräknar bilden $F(\bar{e}_1)$, $F(\bar{e}_2)$ och $F(\bar{e}_3)$

$F(\bar{e}_1) = \bar{e}_1 - \frac{\bar{e}_1\cdot\bar{n}}{\bar{n}\cdot\bar{n}}\bar{n} = (1,0,0) - \frac{(1,0,0)\cdot(1,-1,1)}{(1,-1,1)\cdot(1,-1,1)}(1,-1,1) = (1,0,0) - \frac{1}{3}(1,-1,1) = \frac{1}{3}(2,1,-1)$Detta är första kolonnen i avbildningsmatrisen.

$F(\bar{e}_2) = \frac{1}{3}(1,2,1)$

$F(\bar{e}_3) = \frac{1}{3}(-1,1,2)$

Så $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Not. Varning! För att en ska kunna använda satsen *måste* en veta att avbildningen är *linjär*!

Definition (Isometrisk avbildning)**.** En (linjär) avbildning F är *isometrisk* om $|F(\bar{u})| = |\bar{u}|$ för alla $\bar{u}$ i definitionsmängden.

Exempel. Projektion ej isometrisk, men det är däremot spegling.

Sats. *En linjär avbildning är isometrisk $\Leftrightarrow$ dess avbildningsmatris är ortogonal.*

(A ortogonal $\Leftrightarrow$ kolonnvektorerna i A utgör ON-bas $\Leftrightarrow AA^T = I \Leftrightarrow A^TA = I \Leftrightarrow A^{-1} = A^T$).

Exempel. Speglingsmatrisen är ortogonal (dvs $A^{-1} = A^T$).

Rotation. Rotera $\bar{v}$ med vinkeln θ då fås $F(\bar{v})$.

F är linjär och isometrisk.

Exempel. Bilden av $\bar{e}_1 \parallel x - axeln$, som roteras mot $\pi/2$ med θ.

$F(\bar{e}_1) = (\cos(\theta), \sin(\theta))$

$F(\bar{e}_2) = (-\sin(\theta), \cos(\theta))$

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Exempel. A ortogonal?

$$A^T A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

Ja!