F7 7.3-7.5

Kap 7. Matriser

$A \cdot \underline{\overline{X}} = Y$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 7 + 2\cdot 9 & 1\cdot 8 + 2\cdot 10 \\ 3\cdot 7 + 4\cdot 9 & 3\cdot 8 + 4\cdot 10 \\ 5\cdot 7 + 6\cdot 9 & 5\cdot 8 + 6\cdot 10 \end{pmatrix}$$

- $A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}$ där A_1, A_2, A_3 är radvektorer t.ex. $A_1 = (1, 2)$
- $B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \end{pmatrix}$ där B_1 och B_2 är kolonnvektorer $\left(B_1 = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \end{pmatrix} \right)$
- $AB = \begin{pmatrix} A_1 \cdot B_1 & A_1 \cdot B_2 \\ A_2 \cdot B_1 & A_2 \cdot B_2 \\ A_3 \cdot B_1 & A_3 \cdot B_2 \end{pmatrix}$

Transponat av matris.

Definition. Transponatet A^T av matrisen A fås genom att rader och kolonner "byter plats"

Exempel. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

Definition. A är *symmetrisk* om $A = A^T$.

- Behöver alltså vara kvadratiskt

Sats. *Räkneregler för transponat*
i) $\left(A^T\right)^T = A$
ii) $(A + B)^T = A^T + B^T$
iii) $(\lambda A)^T = \lambda \cdot A^T$
iv) $(AB)^T = B^T A^T$

Bevis. Räkneregel 4.
Ta en godtycklig rad & kolonn och kör det igenom för att se att det blir samma
1) På plats (j, k) i $(AB)^T$ fås (k, j) i (AB).
2) På den senare står rad k i A skalärmuliplicerad med kolonn j i B.
3) På plats (j, k) i $B^T A^T$ står rad j i B^T skalärmultiplicerat med kolonn k i A^T, dvs. kolonn j i B skalärmultiplicerat med rad k i A.
4) Alltså är $(AB)^T = B^T A^T$. □

Date: 2014-02-10.

Linjära ekvationssystem.

Sats. *Huvudsatsen (version 1)*

Antag att A är en $n \times n$-matris. Då är följande tre påståenden ekvivalenta.
(1) Kolonnvektorerna $A_1, \dots, A_n$ utgör en bas i $\mathbb{R}^n$.
(2) Ekvationssystemet $A\underline{\overline{X}} = 0$ har endast lösningen $X = 0$.
(3) Ekvationssystemet $A\underline{\overline{X}} = Y$ är lösbart för varje $Y \in \mathbb{R}^n$.

Bevis. Av 2.
2) är ekvivalent med att kolonnvektorerna i A är linjärt oberoende:

$$0 = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1A_1 + x_2A_2 + \cdots + x_nA_n \qquad \square$$

Bevis. Av 3.
3) är ekvivalent med att kolonnvektorerna i A spänner upp $\mathbb{R}^n$
$Y = x_1A_1 + \cdots + x_nA_n = A\underline{\overline{X}}$ $\square$

Exempel. Har ekvationssystemet $(*) = \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases}$ oändligt många lösningar?

Lösning

1.Vi kan skriva $(*)$ som $A\underline{\overline{X}} = 0$ där $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $\underline{\overline{X}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_y \end{pmatrix}$

2. Vi kollar om 1) i satsen är sann, dvs. om $A_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ utgör i bas (i planet, $\mathbb{R}^2$)

3. $A_1 \nparallel A_2 \Rightarrow$ utgör en bas.

4. 1) sann $\Rightarrow$ 2) sann så $A\underline{\overline{X}} = 0 \Rightarrow \underline{\overline{X}} = 0$, dvs $x_1 = x_2 = 0$.

Svar: Nej, systemet har *en* lösning.

Invers matris ($(n \times n)$-matriser).

- För varje $a \neq 0$ finns ett tal b så att $ab = ba = \boxed{1}$ (tag $b = \frac{1}{a}$!).
- Talet $1 : 1 \cdot a = a$ för alla $a \in \mathbb{R}$.
- Vi ska utvidga detta till matriser.
- (Går att se tal som 1×1-matriser)

Exempel. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{I_2=\text{Enhetsmatris}} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, ettor på diagonalen och nollor i övrigt.

Exempel. $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. $AI_3 = A, \quad \forall \text{A } (3{\times}3)$, $I_3A = A$.

Definition. Vi säger att ($n \times n$-matrisen) A är *inverterbar* om det finns en matris B så att $AB = BA = I$.

Definition. Om A är inverterbar: $A^{-1} = B$.
A^{-1} kallas inversen till A.
$AA^{-1} = A^{-1}A = I$.

Exempel. Visa att för $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ gäller $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$.

Koll: $AA^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$.

Övning. Kolla själva att $A^{-1}A = I$.

Sats (Räkneregler för invers)**.** *A, B inverterbara.*

(1) $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$
(2) $\left(A^{T}\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^{T}$
(3) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Bevis. Av 2. Påståendet som skall visas:
A^T är inverterbar och dess invers är $\left(A^{-1}\right)^T$

Koll: $A^T \cdot \left(A^{-1}\right)^T \underbrace{=}_{(AB)^T = B^T A^T} \Bigg(\underbrace{A^{-1}A}_{=I}\Bigg)^T = I^T = I$

$\left(A^{-1}\right)^T A^T = \Bigg(\underbrace{AA^{-1}}_{=I}\Bigg)^T = I^T = I$

Enligt definitionen är A^T inverterbar och $\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$ $\square$

Lemma. *För att A ska vara inverterbar räcker det att hitta B så att $AB = I$ (då kommer det också att fungera från andra sidan). Det räcker också att hitta C så att $CA = I$.*

Sats (Huvudsatsen)**.** *Version 2*
A $(n \times n)$ följande ekvivalent:
a) Kolonnvektorerna i A utgör bas i $\mathbb{R}^n$
b) $A\underline{\overline{X}} = 0 \Rightarrow \underline{\overline{X}} = 0$
c) $A\underline{\overline{X}} = Y$ har lösning för alla $Y \in \mathbb{R}$
d) A är inverterbar.

Bevis. Visa tillägget d)
$d) \Rightarrow b)$: Antag A inverterbar och $A\underline{\overline{X}} = 0$. Visa $\underline{\overline{X}} = 0$.
Om $A\underline{\overline{X}} = 0$ så är $\underbrace{A^{-1}A}_{=I}\underline{\overline{X}} = \underbrace{A^{-1}0}_{=0}$ och $I\underline{\overline{X}} = \underline{\overline{X}}$ så $\underline{\overline{X}} = 0$
$c) \Rightarrow d)$: Antag att $A\underline{\overline{X}} = Y$ är lösbar för varje $Y \in \mathbb{R}$.

Då är speciellt $A\underline{\overline{X}}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ lösbar

$A\underline{\overline{X}}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ lösbar

$$A\underline{X}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \text{ lösbar}$$

Bilda matrisen som har sedda lösningar som kolonner, $\underline{X} = \left(\underline{X}_1 \underline{X}_2 \dots \underline{X}_n\right)$

Då blir $A\underline{X} = A\left(\underline{X}_1 \underline{X}_2 \dots \underline{X}_n\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix} = I$

Så A är inverterbar, dvs. d) sann. □

Beräkning av invers. (Viktig att klara av!)

Exempel. Beräkna inversen (om den finns) av $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Lösning: $A\underline{X} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. $\underline{X} = A^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A^{-1}$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right] \underbrace{=}_{\text{Gaussa}} \left[\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}}_{I} & \underbrace{\begin{matrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{matrix}}_{A^{-1}} \end{array}\right]$$

Så $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3/2 & -1/2 \end{pmatrix} = \frac{-1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.

Exempel. Beräkna inversen (om den finns) av $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$

Lösning: $\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right] \underbrace{=}_{\text{Gaussa}} \left[\begin{array}{c|cc} \underbrace{\begin{matrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{matrix}}_{\text{0-rad, ej invbar.}} & \begin{matrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{matrix} \end{array}\right]$