F6

Definition. Högerorienterad ortonormerad bas (HON-bas)

$\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ utgör en HON-bas om $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ är en ON-bas ($|\bar{e}_1| = |\bar{e}_2| = |\bar{e}_3| = 1, \bar{e}_1 \cdot \bar{e}_2, \bar{e}_1 \cdot \bar{e}_2, \bar{e}_2 \cdot \bar{e}_3 = 0$) och $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ är positivt orienterade

1. Vektorprodukt i HON-bas

$|\bar{e}_1 \times \bar{e}_2| = 1$. Vinkelrät mot båda och pekar uppåt (samma som $\bar{e}_3$) ovan.
I en HON-bas är $\bar{e}_3 = \bar{e}_1 \times \bar{e}_2 = -\bar{e}_2 \times \bar{e}_1$. (Får rätt riktning och rätt längd)
$\bar{e}_2 = \bar{e}_3 \times \bar{e}_1 = -\bar{e}_1 \times \bar{e}_3$, $\bar{e}_1 = \bar{e}_2 \times \bar{e}_3 = -\bar{e}_3 \times \bar{e}_2$.
Vid förändrad ordning minustecken framför produkten.
Fr.o.m. nu antag att varje bas i rummet är en HON-bas, om inget annat sägs.
Låt $\bar{u} = (x_1, x_2, x_3) = x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + x_3\bar{e}_3$
$\bar{v} = (y_1, y_2, y_3) = y_1\bar{e}_1 + y_2\bar{e}_2 + y_3\bar{e}_3$

$$\bar{u} \times \bar{v} = (x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + x_3\bar{e}_3) \times (y_1\bar{e}_1 + y_2\bar{e}_2 + y_3\bar{e}_3) =$$

$$x_1y_1 \underbrace{\bar{e}_1 \times \bar{e}_1}_{=0} + x_1y_2 \underbrace{\bar{e}_1 \times \bar{e}_2}_{=\bar{e}_3} + x_1y_3 \underbrace{\bar{e}_1 \times \bar{e}_3}_{=-\bar{e}_2} + x_2y_1 \underbrace{\bar{e}_2 \times \bar{e}_1}_{=-\bar{e}_3} +$$

$$x_2y_2 \underbrace{\bar{e}_2 \times \bar{e}_2}_{=0} + x_2y_3 \underbrace{\bar{e}_2 \times \bar{e}_3}_{=\bar{e}_1} + x_3y_1 \underbrace{\bar{e}_3 \times \bar{e}_1}_{=\bar{e}_2} + x_3y_2 \underbrace{\bar{e}_3 \times \bar{e}_2}_{=-\bar{e}_1} + x_3y_3 \underbrace{\bar{e}_3 \times \bar{e}_3}_{=0} =$$

$$(x_2y_3 - x_3y_2)\bar{e}_1 + (x_3y_1 - x_1y_3)\bar{e}_2 + (x_1y_2 - x_2y_1)\bar{e}_3 = (x_2y_3 - x_3y_2), (x_3y_1 - x_1y_3), (x_1y_2 - x_2y_1)$$

Komihåg regel

$$\begin{array}{cccccc} \cancel{x_1} & \cancel{x_1}x_2 & x_3 & x_1 & x_2 & \cancel{x_3} \\ \cancel{y_1} & y_2 & y_3 & y_1 & y_2 & \cancel{y_3} \end{array}$$

Exempel. Beräkna $(1, 2, 3) \times (4, 5, 6)$
$(2 \cdot 6 - 3 \cdot 5, 3 \cdot 4 - 1 \cdot 6, 1 \cdot 5 - 2 \cdot 4) = (-3, 6, -3)$

Exempel. Geometriska tillämpningar
Bestäm arean av triangeln med hörn $P_0 : (1, 4, 1), P_1 : (2, 6, 4), P_2 : (5, 9, 7)$.
Lösning
Triangelarea: $\frac{1}{2} |\bar{u} \times \bar{v}|$
$\bar{u} = \overrightarrow{P_0P_1} = (2 - 1, 6 - 4, 4 - 1) = (1, 2, 3)$
$\bar{v} = \overrightarrow{P_0P_2} = (5 - 1, 9 - 4, 7 - 1) = (4, 5, 6)$
Så $\bar{u} \times \bar{v} = (-3, 6-, 3)$ och arean blir: $\frac{1}{2} |(-3, 6, -3)| = \frac{3}{2} |(-1, 2, -1)| = \frac{3}{2}\sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-1)^2} = \frac{3}{2}\sqrt{6}$.

Exempel. Bestäm minsta avståndet mellan linjerna
$l_1 : (1, 1, 1) + t(1, -1, 1), t \in \mathbb{R}$
$l_2 : (1, 0, 2) + t(2, 1, 3), t \in \mathbb{R}$
Lösning
Avståndet är en sträcka. Den ska vara vinkelrät mot båda linjerna.

Date: 6 februari 2014.

Låt π vara det plan som skär l_1 och som är parallellt med l_2.

Parameterform för π : $\begin{cases} x = 1 & +s + 2t \\ y = 1 & -s + t \\ z = 1 & +s + 3t \end{cases}$ $, s, t \in \mathbb{R}$. (byter namn på t i l_2 till s.)

Avståndet kan bestämmas genom att bestämma (det minsta) avståndet från (linjen) l_2 och (planet) π.

Avståndet mellan punkten P_0 på linjen l_2 och punkten P_1 på planet π fås genom att projicera P_0 på π.

$\vec{QP}$ är projektionen av $P_1\vec{P}_0$ på $\bar{n}$.Sökt avstånd är alltså $|Q\vec{P}_0|$.

Väljer punkterna $P_0 : (1, 0, 2), P_1 : (1, 1, 1)$. Normalen fås genom att hitta en vektor som är ortogonal mot båda riktningsvektorerna för l_1 och l_2. $\bar{v}_1 = (1, -1, 1), \bar{v}_2 = (2, 1, 3)$ är parallella med π.

En normal $\bar{n}$ges av $\bar{n} = \bar{u} \times \bar{v}_2 = (1, -1, 1) \times (2, 1, 3)$.

$\begin{matrix} \cancel{1} & -1 & 1 & 1 & -1 & \cancel{1} \\ \cancel{1} & 1 & 3 & 2 & 1 & \cancel{3} \end{matrix}$.

(-4,-1,3)

$\bar{n} = (-4, -1, 3)$.

$Q\vec{P}_0 = \frac{P_1\vec{P}_0 \cdot \bar{n}}{\bar{n} \cdot \bar{n}} \bar{n}$

$\left| Q\vec{P}_0 \right| = \frac{\left| P_1\vec{P}_0 \right|}{|\bar{n}|^2} |\bar{n}| = \frac{|P_1\vec{P}_0 \cdot \bar{n}|}{|\bar{n}|} = \frac{(1-1, 0-1, 2-1) \cdot (-4, -1, 3)}{|(-4, -1, 3)|} = \frac{|1+3|}{\sqrt{(-4)^2 + (-1)^2 + 3^2}} = \frac{4}{\sqrt{26}}$.

(Blir okej eftersom det rör sig om skalärer, ej vektorer)

Not. Vi får π på affin form: $-4x - y + 3z + d = 0$ (dvs. kryssprodukten mellan vektorerna).

$P_1 \in \pi$ så $(-4 \cdot 1 - 1 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + d = 0 \Leftrightarrow d = 2)$. Dvs. $\pi : -4x - y + 3z + 2 = 0$.

Exempel. Bestäm en HON-bas $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ så att $\bar{e}_1$ och $\bar{e}_2$ är parallella med π : $x + y + z = 0$.

Lösning

Vi kan få flera möjliga lösningar.

$\bar{e}_1, \bar{e}_2 \parallel \pi \Rightarrow \bar{e}_3 \perp \pi$.

Normalisera: $\bar{e}_3 \parallel (1, 1, 1)$

$|(1, 1, 1)| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$.

Tag $\bar{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$.

Välj nu en vektor $\bar{e}_1 \parallel \pi, |\bar{e}_1| = 1$. Ska speciellt vara ortogonal mot normalen: $\bar{e}_1 \cdot (1, 1, 1) = 0$, väljer därför $(1, -1, 0)$. $(1, -1, 0) \cdot (1, 1, 1) = (1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 0) = (1 - 1 + 0) = 0$

$\bar{e}_1 \parallel (1, -1, 0)$. Normalisera $|(1, -1, 0)| = \sqrt{2}$. Sätt $\bar{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0)$.

Nu finns <u>ett</u> val för $\bar{e}_2$:

$\bar{e}_2 = \bar{e}_3 \times \bar{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1) \times \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0) = \bar{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, -2)$.

(Använd minnesreglen: $\begin{matrix} \cancel{1} & 1 & 1 & 1 & 1 & \cancel{1} \\ \cancel{1} & -1 & 0 & 1 & -1 & \cancel{0} \end{matrix}$

Normalisering.

Få samma riktning, men med längden ett.

$\bar{v} = (a, b, c)$.

$|\bar{v}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

$\bar{x} = \frac{1}{|\bar{v}|}\bar{v} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}(a,b,c)$.

$|\bar{x}| = \left|\frac{1}{|\bar{v}/}\bar{v}\right| = \frac{1}{|\bar{v}|}|\bar{v}| = 1$.

Rummet $\mathbb{R}^n$

Vi har skrivit $\bar{u} = (u_1, u_2, u_3)$

Definition. Med $\mathbb{R}^n$ menar vi alla n-tiplar $(x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R})$. Med operationerna
addition: $(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$
multiplikation: $\lambda(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n)$.
Med dessa regler blir $\mathbb{R}^n$ ett vektorrum (dvs uppfyller A0-A4 & M0-M4)

Skalärprodukt. $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \cdot (y_1, y_2, \ldots, y_n) = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n$
$\bar{x} \in \mathbb{R}^n$
$|\bar{x}| = \sqrt{\bar{x} \cdot \bar{x}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots x_n^2}$.
$\bar{x}$ och $\bar{y}$ är ortogonala om $\bar{x} \cdot \bar{y} = 0$.

Linjärt beroende/oberoende. $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots \bar{u}_p$ linjärt oberoende $\Leftrightarrow$ $\lambda_1\bar{u}_1 + \lambda_2\bar{u}_2 + \cdots + \lambda_p\bar{u}_p = 0$ och endast har läsningen $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_p = 0$

Sats (Bassatsen)**.**

(1) Varje bas i $\mathbb{R}^n$ har n element.
(2) n vektorer i $\mathbb{R}^n$ utgör en bas för $\mathbb{R}^n$ $\Leftrightarrow$ de är linjärt oberoende$\Leftrightarrow$ de spänner upp $\mathbb{R}^n$.
(3) Fler än n vektorer i $\mathbb{R}^n$ är linjärt beroende.
(4) Färre än n vektorer i $\mathbb{R}^n$ kan ej spänna upp $\mathbb{R}^n$ (för följder se ii)

Exempel. Är $(1,0,2,3), (1,2,-1,0), (2,-1,0,1), (3,1,0,2)$ en bas i $\mathbb{R}^4$?
Lösning
Vi kontrollerar om de är linjärt oberoende
$\lambda_1(1,0,2,3) + \lambda_2(1,2,-1,0) + \lambda_3(2,-1,0,1) + \lambda_4(3,1,0,2) = (0,0,0,0)$

$$\left\{\begin{array}{lllll} \lambda_1 & +\lambda_2 & +2\lambda_3 & +3\lambda_4 & = 0 \quad (a) \\ & 2\lambda_2 & -\lambda_3 & +\lambda_4 & = 0 \quad (b) \\ 2\lambda_1 & -\lambda_2 & & & = 0 \quad (c) \\ 3\lambda_1 & & +\lambda_3 & +2\lambda_4 & = 0 \quad (d) \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{llllll} \lambda_1 & +\lambda_2 & +2\lambda_3 & +3\lambda_4 & = 0 & (a) \\ & 2\lambda_2 & -\lambda_3 & +\lambda_4 & = 0 & (b) \\ & -3\lambda_2 & -4\lambda_3 & -6\lambda_4 & = 0 & (c' = -2a + c) \\ & -3\lambda_2 & -5\lambda_3 & -7\lambda_4 & = 0 & (d' = -3a + d) \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{llllll} \lambda_1 & +\lambda_2 & +2\lambda_3 & +3\lambda_4 & = 0 & (a) \\ & 2\lambda_2 & -\lambda_3 & +\lambda_4 & = 0 & (b) \\ & & -\frac{11}{2}\lambda_3 & -\frac{9}{2}\lambda_4 & = 0 & (c'' = \frac{3}{2}b + c') \\ & & -\lambda_3 & -\lambda_4 & = 0 & (d'' = -1c' + d') \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) = (0,0,0,0)$$

Är linjärt oberoende (dvs $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$)