4.3, 5.1-5.3

1. Geometriska tillämpningar

Sats (4.4)**.** *Antag att $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ utgör en ON-bas i rummet, och antag att $\bar{v} = x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + x_3\bar{e}_3$. Då är:*

$$\begin{cases} x_1 = \bar{v} \cdot \bar{e}_1 \\ x_2 = \bar{v} \cdot \bar{e}_2 \\ x_3 = \bar{v} \cdot \bar{e}_3 \end{cases}$$

Bevis. $\bar{v} \cdot \bar{e}_1 = (x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + x_3\bar{e}_3) \cdot \bar{e}_1 = x_1 \underbrace{\bar{e}_1 \cdot \bar{e}_1}_{|\bar{e}_1|^2=1} + x_2 \underbrace{\bar{e}_2 \cdot \bar{e}_1}_{=0} + x_3 \underbrace{\bar{e}_3 \cdot \bar{e}_1}_{=0} = x_1$ □

Exempel. Dela upp $\bar{u} = (1, 2, 3)$ i komposanter (dvs. $\bar{u} = \bar{u}_1 + \bar{u}_2$) $\bar{u}_1$ och $\bar{u}_2$ så att $\bar{u}_1 \perp \bar{u}_2$ och $\bar{u} \parallel \bar{v}$, där $\bar{v} = (3, 1, 0)$.

$\bar{u}$ får vi som projektionen av $\bar{u}$ på $\bar{v}$:
$\bar{u}_1 = \frac{\bar{u}\cdot\bar{v}}{\bar{v}\cdot\bar{v}}\bar{v}$
Dessutom:
$\bar{u}_2 = \bar{u} - \bar{u}_1$.
$\bar{u}_1 = \frac{(1,2,3)\cdot(3,1,0)}{(3,1,0)\cdot(3,1,0)}(3, 1, 0) = \frac{3+2+0}{9+1+0}(3, 1, 0) = \frac{1}{2}(3, 1, 0)$.
$\bar{u}_2 = \bar{u} - \bar{u}_1 = \cdots = \frac{1}{2}(-1, 3, 6)$.

Exempel. Bestäm den ortogonala projektionen Q av punkten $P : (2, -3, 1)$ i planet $\pi : 2x - 2y + z - 5 = 0$. Bestäm även spegelbilden S av P i π.

Ortogonala projektionen

(1) Välj den godtyckliga punkten R i planet π. $R : (0, 0, 5)$, dvs. den uppfyller ekvationen för π.
(2) $\vec{OQ} = \vec{OP} - \vec{QP}$.
(3) $\vec{OP}$ är känd.
(4) Normalvektorn $\bar{n} = (2, -2, 1)$.
(5) Använda normalen $\bar{n}$, som utgår från Q: $\vec{QP}$ är $\vec{RP}$ projicerad på $\bar{n}$.
(6) Dvs. $\vec{QP} = \frac{\vec{RP}\cdot\bar{n}}{\bar{n}\cdot\bar{n}}\bar{n}$
(7) Vi får $\vec{OQ} = (2, -3, 1) - \frac{(2,-3,1-5)\cdot(2,-2,1)}{(2,-2,1)\cdot(2,-2,1)}(2, -2, 1) = \cdots = \frac{1}{3}(2, -5, 1)$
(8) $Q : \frac{1}{3}(2, -5, 1)$ då ortsvektorn anger koordinaterna.

Speglingen

$\vec{OS} = \vec{OP} - 2\vec{QP} = (2, -3, 1) - 2\frac{(2,-3,1-5)\cdot(2,-2,1)}{(2,-2,1)\cdot(2,-2,1)}(2, -2, 1) = \cdots = \frac{-1}{3}(2, 1, 1)$

Exempel. Bestäm minsta avståndet mellan $P : (2, -3, 1)$ och $\pi : 2x-2y+z-5 = 0$.

Dvs. avståndet som fås vid rätlinjig projektion. Detta ges av $\left|\vec{QP}\right|$, dvs. $\left|\frac{(2,-3,-4)\cdot(2,-2,1}{(2,-2,1)\cdot(2,-2,1)}(2, -2, 1)\right| = \frac{6}{9}\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2} = 2$

Exempel. Bestäm (det minsta) avståndet mellan $P : (3, 1, 2)$ och linjen $l : (x, y, z) = (1, 2, -1) + t(2, 2, -1)$.

Date: 3 februari 2014.

(1) Dvs. gå vinkelrätt från punkten till linjen.
(2) Sätt in projektionen av P på l och benämn den Q.
(3) Avståndet ges av $\left|\vec{QP}\right|$
(4) Välj linjens riktningsvektor $\bar{v} = (2, 2, -1)$.
(5) Låt $P_0 : (1, 2, -1)$ dvs. sätt $t = 0$ i linjen l:s ekvation, för att få en punkt.
(6) Då är $\vec{QP} = \vec{P_0P} - \vec{P_0Q} = \vec{P_0P} - \frac{\vec{P_0P}\cdot\bar{v}}{\bar{v}\cdot\bar{v}}\bar{v} = \frac{1}{9}(20, -7, 26)$.
(7) Dvs. $\left|\vec{QP}\right| = \frac{1}{9}\sqrt{20^2 + (-7)^2 + 26^2} = \frac{5\sqrt{5}}{3}$

Definition. Positiv/negativ orientering

I planet: "Om den kortaste vägen mellan $\bar{u}$ och $\bar{v}$ är motsols är $\bar{u}, \bar{v}$ positivt orienterade. I annat fall negativt orienterade"

$\bar{u}, \bar{v}$ positivt orienterade $\Leftrightarrow \bar{v}, \bar{u}$ negativt orienterade. (byt plats på dem).

i rummet: $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ positivt orienterade om $\bar{u}$ och $\bar{v}$ ses positivt orienterade från huvudet på $\bar{w}$.

Sats. *Vid cyklisk permutation ändras inte ordningen:*
$\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ har samma orientering som $\bar{w}, \bar{u}, \bar{v}$.

2. Kap 5 Vektorprodukt (kryssprodukt)

Definition. Låt $\bar{u} \neq \bar{0}$, $\bar{v} \neq \bar{0}$ i rummet. Med *vektorprodukten* (*kryssprodukten*) $\bar{u} \times \bar{v}$ menas den vektor som har egenskaperna:

(1) $|\bar{u} \times \bar{v}| = |\bar{u}| \cdot |\bar{v}| \cdot \sin[\bar{u}, \bar{v}]$
(2) $\bar{u} \times \bar{v}$ är ortogonal mot $\bar{u}$ och $\bar{v}$.
(3) De tre vektorerna $\bar{u}, \bar{v}, \bar{u} \times \bar{v}$ ska vara positivt orienterade.

Sats. $|\bar{u} \times \bar{v}|$ *=arean av den parallellogram som spänns upp av $\bar{u}$ och $\bar{v}$.*

Sats (Sid 85 i boken)**.** *Låt W vara volymen av den parallellepiped som spänns upp av $\bar{u}$, $\bar{v}$ och $\bar{w}$. Då är $W = \pm(\bar{u} \times \bar{v}) \cdot \bar{w}$ där tecknet väljs så att W blir positivt.*

Bevis. $\left(\frac{h}{\bar{w}} = \cos\theta\right)$ Volymen=basarea x höjd=$|\bar{u}\times\bar{v}|\cdot h = |\bar{u}\times\bar{v}|\cdot|\bar{w}|\cdot\cos\theta = (\bar{u}\times\bar{v})\cdot\bar{w}$

$$W = \begin{cases} \{\bar{u} \times \bar{v}) \cdot \bar{w} & \text{om } \bar{u}, \bar{v}\bar{w} \text{ positivt orienterade} \\ -(\bar{u} \times \bar{v}) \cdot \bar{w} & \text{om } \bar{u}, \bar{v}\bar{w} \text{ negativt orienterade} \end{cases} \qquad \square$$

Definition. $(\bar{u} \times \bar{v}) \cdot \bar{w}$ kallas den *skalära trippelprodukten* av $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$

$(\bar{u} \times \bar{v}) \cdot \bar{w} = (\bar{w} \times \bar{u}) \cdot \bar{v}$

Räkneregler.

(1) $\bar{u} \times \bar{v} = \bar{0} \Leftrightarrow \bar{u} \parallel \bar{v}$
(2) $\bar{v} \times \bar{u} = -\bar{u} \times \bar{v}$
(3) $(\bar{u}_1 + \bar{u}_2) \times \bar{v} = \bar{u}_1 \times \bar{v} + \bar{u}_2 \times \bar{v}$
(4) $(\lambda\bar{u}) \times \bar{v} = \lambda(\bar{u} \times \bar{v})$

Exempel. Skalärprodukt vs. vektorprodukt (kryssprodukt)

Skalärprodukt: $(\bar{u} + \bar{v}) \cdot (\bar{u} - \bar{v}) = \bar{u} \cdot \bar{u} - \bar{u} \cdot \bar{v} + \underbrace{\bar{v} \cdot \bar{u}}_{\bar{u}\cdot\bar{v}} - \bar{v} \cdot \bar{v} = |\bar{u}|^2 - |\bar{v}|^2$

Vektorprodukt (kryssprodukt): $(\bar{u}+\bar{v}) \times (\bar{u}-\bar{v}) = \underbrace{\bar{u} \times \bar{u}}_{\bar{0}} - \bar{u} \times \bar{v} + \underbrace{\bar{v} \times \bar{u}}_{-\bar{u}\times\bar{v}} - \underbrace{\bar{v} \times \bar{v}}_{\bar{0}} =$

$-2\bar{u} \times \bar{v}$