

DETERMINANT 9.1-9.2, 9.6

9.4 DEFINITION AV DETERMINANT, UTVECKLING

$(n \times n)$ -matriser

Definition. Stryk raden/kolonnen som a_{mn} "ingår" i.

$n = 1$, en matris som endast är ett tal.

$A = (a_{11})$. $\det A = a_{11}$.

$n = 2$

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11} \underbrace{\det(a_{22})}_{\text{stryk första raden/kolonnen}} - a_{12} \underbrace{\det(a_{21})}_{\text{stryk första raden, andra kolonnen}} =$$

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$n = 3$

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11} \det \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - a_{12} \det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} + a_{13} \det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

$n \geq 4$ utveckla i underdeterminanter av storlek $(n-1) \times (n-1)$ efter första raden, den första positiv, den andra negativ osv.

Exempel. $n = 5$

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - & + \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

Exempel. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} =$

$$1 \cdot (5 \cdot 9 - 6 \cdot 8) - 2 \cdot (4 \cdot 9 - 6 \cdot 7) + 3 \cdot (4 \cdot 8 - 5 \cdot 7)$$

9.3 RÄKNEREGLER

Sats (Räkneregler för determinanter). a) *Byt plats på två rader och determinanten byter tecken.*

b) *Multipluera en rad med ett tal och hela determinanten multipliceras med det talet.*

c) *Lägg till en multipel av en rad till en annan och determinantens värde är oförändrad.*

d) $\det I = 1$.

e) $\det A^T = \det A$ (det går alltså lika bra att beräkna determinanten för transponatet).

f) $\det(AB) = \det A \cdot \det B$

Date: 2014-02-24.

g) (den viktigaste egenskapen) $\det A \neq 0 \Rightarrow A$ är inverterbar

h) Om A är inverterbar så är $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$

i) Om A är ortogonal så är $\det A = -1$ eller $\det A = 1$

Bevis. h) följer ur f) och d):

$$AA^{-1} = I$$

$$\det(AA^{-1}) = \det I \stackrel{d)}{=} 1$$

$$\det(AA^{-1}) \stackrel{f)}{=} \det A \cdot \det A^{-1} \text{ så } \det A^{-1} = \frac{1}{\det A} \quad \square$$

I själva verket kan vi utveckla efter vilken rad/kolonn vi önskar:

Följande teckenschema gäller

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - & + \\ - & + & - & + & - \\ + & - & + & - & + \\ - & + & - & + & - \\ + & - & + & - & + \end{pmatrix}$$

Exempel. Utveckling efter kolonn två:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} - 8 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

9.1-9.2 VOLYM & AREA

$$\text{I } \mathbb{R}^3: A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix}, A = (A_1 \ A_2 \ A_3) =$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Då är $\det A \stackrel{=}{=} A_1 \cdot (A_2 \times A_3) = \text{volymen (med tecken) av den}$

Gör denna räkning själva

parallelepiped som spänns upp av A_1 , A_2 och A_3 .

Exempel. Speciellt gäller att determinanten är noll om två kolonner/rader är parallella.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 10 & 5 & 15 \\ 4 & -10 & -30 \end{vmatrix} = 0 \text{ (ty } \begin{pmatrix} 6 \\ 15 \\ -30 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -10 \end{pmatrix})$$

I $\mathbb{R}^2$: Volymen av parallelepipeden = basarean (med tecken), dvs. arean av parallelogrammen som spänns upp av vektorerna (a_{11}, a_{21}) och $(a_{12}, a_{22}) =$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \stackrel{=}{=} 1 \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \text{ utveckling efter sista raden}$$

Exempel. Areal av triangel med hörn i $P_0 : (1, 2)$, $P_1 : (2, 4)$, $P_2 : (3, 1)$

Lösning

Kan ses som halva parallelogrammet som spänns upp av $\vec{u}_1 = P_0\vec{P}_1$ och $\vec{u}_2 = P_0\vec{P}_2$.

$$\text{Triangelarean} : \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -\frac{5}{2} \text{ så arean är } \frac{5}{2} \text{ a.e.}$$

Exempel (9.36). Beräkna determinanten för $A = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 3 & 9 \\ 5 & 4 & 1 & 6 \\ 7 & 5 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Lösning

“Leta efter nollor”. Sista raden/tredje kolonnen är lämplig att utveckla från:

$$\begin{vmatrix} 5 & 8 & 3 & 9 \\ 5 & 4 & 1 & 6 \\ 7 & 5 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \stackrel{c)}{=} \begin{vmatrix} -13 & -1 & 3 & 9 \\ -7 & -2 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \stackrel{=}{=} \begin{vmatrix} -13 & -1 & 3 \\ -7 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \stackrel{=}{=} \begin{vmatrix} -16 & -7 & 0 \\ -8 & -4 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \stackrel{=}{=} \begin{vmatrix} -16 & 7 \\ -8 & -4 \end{vmatrix} =$$

utv. 4e raden. Utv 3e kol.

8

Not. Matriserna är inverterbara.

9.6 HUVUDSATSEN OCH EKVATIONSSYSTEM

Sats (Huvudsatsen). A är en $n \times n$ -matris. Då är följande ekvivalent:

- Kolonnvektorererna i A utgör en bas i $\mathbb{R}^n$
- Radvektorererna i A utgör en bas i $\mathbb{R}^n$
- $A\bar{X} = 0 \Rightarrow \bar{X} = 0$
- $A\bar{X} = \bar{Y}$ är lösbart (entydigt) för alla $\bar{Y} \in \mathbb{R}^n$
- A är inverterbar
- Linjära avbildningar med A som avbildningsmatris är bijektiv (både surjektiv och injektiv)
- $\det A \neq 0$

Lösning av $A\bar{X} = Y$.

	$Y = 0$	$Y \neq 0$
$\det A = 0$	Parameterlösning	Antingen parameterlösning eller ingen lösning
$\det A \neq 0$	Endast $\bar{X} = 0$	Endast $\bar{X} = A^{-1}Y$

Exempel. För vilka a saknar systemet $A\bar{X} = Y$ lösning då $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ a & -1 & 0 \\ 3 & 0 & a \end{pmatrix}$,

$$Y = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}?$$

Lösning

$Y \neq \bar{0}$.

Krav: $\det A \underbrace{=}_\text{krav} 0$,

Beräkning av determinanten $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ a & -1 & 0 \\ 3 & 0 & a \end{vmatrix} \underbrace{=}_\text{Kolonn 3} 1 \begin{vmatrix} a & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{vmatrix} + a \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ a & -1 \end{vmatrix} = 3 + a(-1 - 2a) = -2(a^2 + \frac{1}{2}a - \frac{3}{2}) = -2((a-1)(a+\frac{3}{2}))$ så $\det A = 0 \Leftrightarrow a = 1$ eller $a = -3/2$

Behöver kontrollera om det är ingen lösning eller parameterlösning

För $a = 1$ gäller:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \text{ vi får parameterlösning, alltså}$$

är det ingen lösning på uppgiften.

För $a = -3/2$ får vi:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -3/2 \\ -3/2 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -3/2 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -3/2 \\ 0 & 2 & 3/2 & -9/4 \\ 0 & 0 & 0 & -5/4 \end{array} \right) 0 \neq -5/4 \text{ lösning saknas}$$

alltså.

Svar: Systemet saknar lösning för $a = -3/2$.