Innehåll

8.3-8.5

Linjära avbildningar (fortsättning)

Respekterar både addition och multiplikation med skalär

Not. Om F är linjär så gäller $F(0) = 0$. Detta ses genom att sätta $\lambda = 0$ i $F\underbrace{(\lambda \bar{u})}_{=0} = \underbrace{\lambda F(\bar{u})}_{=0}$

Exempel. Projektion på plan som ej går genom origo. (Ytterligare ett sätt att kolla upp linjäritet)

$\bar{O} = (0, 0, 0)$ projiceras i planet, men eftersom $\bar{0}$ inte tillhör planet så gäller inte att $\bar{0}$ avbildas på samma punkt $(\bar{0})$

Definition (Definitionsmängd och värdemängd)**.** $F : M_1 \to M_2$. M_1 kallas för *definitionsmängd* D_F. M_2 kallas för *värdemängd* V_F och består av alla $y \in M_2$ sådana att $y = F(x)$ för något $x \in D_F$.

"Stoppa in, få ut"

Exempel. Bestäm värdemängden för ortogonal projektion på $\pi : x - y + z = 0$

Lösning

"Vilka x, y, z kan vi träffa?"

Här är det nog klart att värdemängden blir planet π.

Förra gången:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Vilka y kan vi träffa när vi stoppar in x?

$(A\underline{X} = Y)$

Som linjärt ekvationssystem.

För vila högerled har systemet nedan lösning?

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 3y_1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 3y_2 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = 3y_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 3y_2 \\ -3x_2 - 3x_3 = 3y_1 - 6y_2 \\ 0 = 3y_1 - 3y_2 + 3y_3 \end{cases}$$

Så lösningen finns $\Leftrightarrow y_1 - y_2 + y_3 = 0$. Finns två pivotpositioner ovan vilket ger parameterlösning.

Date: 2014-02-20.

Sammansättning och invers.

Exempel. Låt $f(x) = \sin(x)$ och $g(x) = 2x$. Vi kan bilda $f \circ g(x) = f(g(x)) = f(2x) = \sin(2x)$ och $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(\sin(x)) = 2\sin(x)$ så $g \circ f \neq f \circ g$ i allmänhet.

Exempel. Om $G : M_1 \to M_2$ och $F : M_2 \to M_3$ är linjära avbildningar med $V_G \subset D_F$ så kan vi bilda $F \circ G$ i $F \circ G(x) = F(G(x))$.

"Allt som kommer ut från G ska kunna stoppas in i F"

Sats. *Om G har avbildningsmatris B och F har avbildningsmatris A och $F \circ G$ är definierad så är $F \circ G$ också linjär och dess avbildningsmatris är AB.*

Bevis. $G(\underline{X}) = B\underline{X}$, $F(\underline{Y}) = A\underline{Y}$. *Då blir* $F \circ G(\underline{X}) = F(G(\underline{X})) = F(B(\underline{X}) = A(B\underline{X}) = (AB)\underline{X}$. *Detta ger även att $F \circ G$ är linjär eftersom den ges som multiplikation med matris.* □

Exempel. Bestäm avbildningsmatrisen för avbildningarna

a) För spegling i $\pi : x - y + z = 0$, därefter spegling i xy-planet.

b) Först spegling i xy-planet, därefter spegling i $\pi : x - y + z = 0$.

Lösning

Båda planen är linjära, varför? (se första stycket)

Spegling i π: $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ (förra gången)

Spegling i xy-planet, $z = 0$:

* $\bar{e}_1 \to \bar{e}_1$

* $\bar{e}_2 \to \bar{e}_2$

* $\bar{e}_3 \to \bar{e}_3$

$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ (Se http://dixon.hh.se/getc/LinSys/LinAvbildningar.pdf)

a) Tar BA (det som ska träffa vektorerna först till höger, vektorn är alltså till vänster om AB). $BA = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ (sista raden byter tecken,)

b) Tar istället $AB = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ (sista kolonnen byter tecken)

Exempel. Avbildningsmatris för spegling 2 gånger i planet $x - y + z = 0$ ges av AA där A är speglingsmatrisen ovan

Lösning

A var symmetrisk så $A = A^T$. A var också ortogonal så $AA^T = I$ dvs. $AA = I$.

Definition (Injektiv, surjektiv, bijektiv)**.** En avbildning $F : M_1 \to M_2$ är *injektiv* om det till varje $y \in V_F$ finns precis ett $x \in D_F$ så att $y = F(x)$, "Varje y får endast träffas en gång". $y = x^2$ ej injektiv!

Om $V_F = M_2$ så är F *surjektiv* (precis allt träffas).

Om F är injektiv och subjektiv så säger man att F är *bijektiv*.

Exempel. Om F är bijektiv kan vi bilda avbildningen F^{-1} så att $y = F(x) \Leftrightarrow x = F^{-1}(y)$

Sats. *Om F är linjär och bijektiv med avbildningsmatris A så är F^{-1} linjär med avbildningsmatris A^{-1} .*

Exempel. $Y = A\underline{\overline{X}} \Leftrightarrow A^{-1}Y = \underline{\overline{X}}$

Exempel. Spegling i $x - y + z = 0$ är bijektiv. $AA = I$ så speglingens invers är spegling igen.

Exempel. Ortogonal projektion på $x-y+z = 0$ är inte bijektiv (är varken injektiv eller surjektiv)

Ej injektiv (tänk projektion efter normalen). Ej surjektiv; kan ej träffa punkter utanför planet.

Avbildningsmatrisen ej inverterbar.

Basbyte vid linjära avbildningar. Antag att vi har två baser E och E', och en linjär avbildning som ges av $Y = A\underline{\overline{X}}$ i basen E och $Y' = A'\underline{\overline{X}}'$ i basen E'. Vilket samband finns mellan A och A'?

Lösning

Komihåg: Om $E' = S^T E$ så är $\underline{\overline{X}} = S\underline{\overline{X}}'$och $Y = S\underline{\overline{Y}}'$

$Y = A\underline{\overline{X}} \Leftrightarrow SY' = AS\underline{\overline{X}}' \Leftrightarrow Y' = \underbrace{S^{-1}AS}_{=A'}\underline{\overline{X}}'$

Sats. *Om en avbildning har avbildningsmatrisen A i basen E och avbildningsmatrisen A' i basen E' och $E' = S^T E$ så gäller $A' = S^{-1}AS$ (S^{-1} från vänster och S från höger)*

Exempel. Spegling i $\pi : x - y + z = 0$. Inför en ny ON-bas $\bar{e}_1'$, $\bar{e}_2'$ och $\bar{e}_3'$ så att avbildningsmatrisen A' blir så enkel som möjligt.

Lösning

Vi har sett att avbildningen har avbildningsmatris $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ i basen

$$\begin{cases} \bar{e}_1 = (1, 0, 0) \\ \bar{e}_2 = (0, 1, 0) \\ \bar{e}_3 = (0, 0, 1) \end{cases}$$

Välj $\bar{e}_1', \bar{e}_2' \parallel \pi$, ortogonala mot varandra

$\bar{e}_1{}' \to \bar{e}_1{}'$

$\bar{e}_2{}' \to \bar{e}_2{}'$

Den tredje vektorn väljer vi som en normal till π med längd 1. Då gäller $\bar{e}_3{}' \to -\bar{e}_3{}'$.

Vi får då avbildningsmatris $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Till exempel duger ($\bar{n} = (1, -1, 1)$) , $\begin{cases} \bar{e}_1{}' = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0) \\ \bar{e}_2{}' = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, 1, 2) \\ \bar{e}_3{}' = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1) \end{cases}$ Kryssprodukt med normalen och normalisering

$$E' = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{3} & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}}_{S^T} E$$

$S = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & 1 & -\sqrt{2} \\ 0 & 2 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$

Ortonormalt basbyte $\Rightarrow S$ ortogonal alltså är $S^{-1} = S^T$.

Vi får $A' = S^{-1}AS \overbrace{=}^{S\text{ortogonal}} S^T AS = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{3} & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & 1 & -\sqrt{2} \\ 0 & 2 & \sqrt{2} \end{pmatrix} =$

$\frac{1}{18} \begin{pmatrix} 18 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & -18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$