F3: 3.1-3.3

"Sätt ej hörnet (vipopunkterna) till parametrar, utan använd den "sista" variabeln, t.ex. z om (x,y,z)"

1. Koordinatsystem

- Koordinatsystem i 2D (x.y). $(\bar{e_y}, \bar{e_x})$
- Mål: kunna prata om punkter.

Planet.

(1) Välj en punkt O, som kallas origo, och
(2) En bas $\bar{e}_x, \bar{e}_y$ för planet.

- Varje punkt P i planet svarar då mot en riktad sträcka (har alltså fotpunkt) $\vec{OP}$.
- Denna sträckan kan utryckas med *ortsvektorn* till punkten P: $\vec{OP} = x \cdot \bar{e}_x + y \cdot \bar{e}_y$ på entydigt vis.
- x och y kallas för *koordinater* för P i *koordinatsystemet* $O\bar{e}_x\bar{e}_y$.
- Vi skriver $P : (x, y)$. En punkt utrycks alltså med ett : (kolon).
  - En vektor eller riktad sträcka utrycks med = (lika med)

Exempel. Om $P_1 : (x_1, y_1, z_1)$ och $P_2 : (x_2, y_2, z_2)$.
$\vec{P_1P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$

Bevis. $\vec{P_1P_2} = (\vec{OP_2} - \vec{OP_1})$ □

Exempel. Vilken punkt M ligger mitt emellan $A : (1, 2, 3)$ och $B : (-3, 4, 5)$?
Skriv in punken O. $\vec{OM} = \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OB})$.
Med O som origo fås: $\vec{OM} = \frac{1}{2}((1, 2, 3) + (-3, 4, 5)) = (-1, 3, 4)$. I och med att O är origo är $M : (-1, 3, 4)$.

Linjer (i rummet).

- Antag ett koordinatsystem $O\bar{e}_x\bar{e}_y\bar{e}_z$ där O är en fix punkt.

Bestämma en linje:

(1) Punkt
(2) Riktningsvektor

Parameterform. Punkter: $P_0 : (x_0, y_o, z_0)$ och $P : (x, y, z)$. Vektor $\bar{v} = (\alpha, \beta, \gamma)$. Det finns ett tal sådant att $\vec{P_0P} = t \cdot \bar{v}$.
$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = t(\alpha, \beta, \gamma) = (t\alpha, t\beta, t\gamma)$, $t \in \mathbb{R}$.

$$\text{Linje på parameterform} \begin{cases} \boxed{\begin{array}{l} x = x_0 + t\alpha \\ y = y_0 + t\beta \quad\quad , t \in \mathbb{R} \\ z = z_0 + t\gamma \end{array}} \end{cases}$$

Date: 27 januari 2014.

Exempel. Bestäm ekvation på parameterform för den linje som skär $P_0 : (1,2,3)$ och $P_1 : (6,5,4)$.

$\bar{v} = \vec{P_0P_1} = (6-1, 5-2, 4-3) = (5,3,1) = (\alpha, \beta, \gamma)$. Vi får (med P_0som punkt):

$$\begin{cases} x = 1 + t \cdot 5 \\ y = 2 + t \cdot 3 \quad ,t \in \mathbb{R} \\ z = 3 + t \cdot 1 \end{cases}$$

Not. Alternativt svar: $\begin{cases} x = 6 - 10t \\ y = 5 - 6t \quad ,t \in \mathbb{R} \\ z = 4 - 2t \end{cases}$. (sätt $t = \frac{1}{2}$ för att få svaret ovan).

Exempel. Tillhör punkten $P_2 : (1,5,3)$ linjen ovan?

Lösning: Sätt in $x = 1, y = 5, z = 3$ i linjen på parameterform ovan:

$$\begin{cases} 1 = 1 + 5t \\ 5 = 2 + 3t \\ 3 = 3 + t \end{cases} \overset{\text{Existerar talet t?}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} t = 0 \\ t = 1 \\ t = 0 \end{cases}$$

Exempel. Skär linjerna l_i : $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \quad t \in \mathbb{R} \\ z = 3 + 2t \end{cases}$ och l_2 : $\begin{cases} x = 4 - s \\ y = 5 - 2s \quad s \in \mathbb{R} \\ z = 3 + s \end{cases}$ varandra?

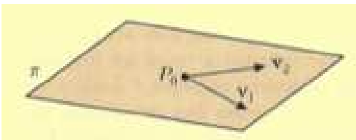
Då ska (x,y,z) vara lika i en skärningspunkt för både l_1 och l_2:

$$\begin{matrix} x: \\ y: \\ z: \end{matrix} \begin{cases} 1 + t = 4 - s \\ 2 - t = 5 - 2s \\ 3 + 2t = 3 + s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s = & 2 \\ t = & 1 \end{cases}$$

. I och med att det finns en lösning så skär punkterna varandra! I punkten: $(x,y,z) = (2,1,5)$

$$\begin{matrix} x: \\ y: \\ z: \end{matrix} \begin{cases} x_1 + \alpha_1 \cdot t = x_2 + \alpha_2 \cdot s \\ y_1 + \beta_1 \cdot t = y_2 + \beta_2 \cdot s \\ z_1 + \gamma_1 \cdot t = z_3 + \gamma_2 \cdot s \end{cases}$$

2. Plan på parameterform



Givet en punkt P_0 och två icke-parallella vektorer $\bar{v}_1 = (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, $\bar{v}_2 = (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$. $\vec{P_0P}$ kan skrivas som en linjärkombination av $\bar{v}_1$ och $\bar{v}_2$:

$$\boxed{\pi : \begin{cases} x = x_0 + \alpha_1 s + \alpha_2 t \\ y = y_0 + \beta_1 s + \beta_2 t \quad s,t \in \mathbb{R} \\ z = z_0 + \gamma_1 s + \gamma_2 \end{cases}} \leftarrow \text{Planets ekvation på parameterform.}$$

Exempel. Bestäm en ekvation på parameterform för planet πsom skär $P_0 : (1,1,1), P_1 : (2,-1,3), P_2 : (3,2,-5)$

Låt $\bar{v}_1 = \vec{P_0P_1} = (1,-2,2) = (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ och $\bar{v}_2 = \vec{P_0P_2} = (2,1,-6) = (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$.

$$\pi : \begin{cases} x = 1 + s + 2t \\ y = 1 - 2s + t \qquad , s, t \in \mathbb{R} \\ z = 1 + 2s - 6t \end{cases}$$

Exempel. Tillhör $(0, -2, 9)$ planet π ovan?

Vi kollar om systemet:

$$\begin{cases} 0 = 1 + s + 2t \\ -2 = 1 - 2s + t \quad , s, t \in \mathbb{R} \text{ har en lösning för } s, t \,. \\ 9 = 1 + 2s - 6t \end{cases}$$

Svar: Ja!

$$\begin{cases} x_\nu = 1 + s + 2t \\ y_\nu = 1 - 2s + t \qquad , s, t \in \mathbb{R} \\ z_\nu = 1 + 2s - 6t \end{cases}$$

3. Plan på affin form (plan på normalform)

Vi jobbar med π ovan för att eliminera s och t.

$$\begin{cases} s + 2t = x - 1 \\ -2s + t = y - 1 \\ 2s - 6t = z - 1 \end{cases} \overset{\text{Gaussa}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} s + 2t = x - 1 \\ 5t = 2x + y - 3 \\ 0 = -2x + z + 1 + 4x + 2y - 6 \end{cases} \quad \text{så } (x, y, z) \text{ tillhör}$$

$\pi \Leftrightarrow \boxed{2x + 2y + z - 5 = 0} \leftarrow$ Plantet π:s ekvation på affin (normal) form.

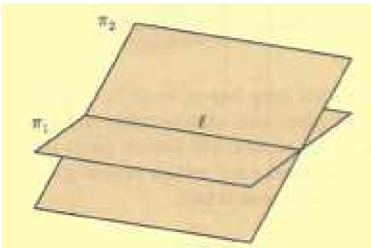
Allmänt: $\boxed{ax + by + cz + d = 0}$ (Normalen till planet $\bar{n} = (a, b, c)$)

Exempel. Tillhör $(0, -2, 9)$ planet π?

Sätt in punkten $(0, -2, 9)$ i den affina formen: $2 \cdot \underbrace{0}_{x} + 2 \cdot \underbrace{-2}_{y} + 1 \cdot \underbrace{9}_{z} - 5 = 0.$

Svar: Ja!

Exempel. Bestäm skärningen mellan planen $2x+2y+z-5 = 0$ och $4x+y-z-4 = 0$. (Plan skär normalt varandra - och det längst en linje).

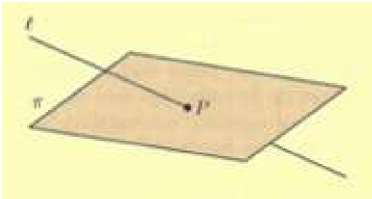


Vid skärning är (x, y, z)-koordinaterna samma för planen. Dvs. vi ska lösa ekvationssystemet:

$$\begin{cases} 2x + 2y + z - 5 = 0 \Leftrightarrow 2x + 2y + z = 5 \\ 4x + y - z - 4 = 0 \Leftrightarrow 4x + y - z = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t \\ y = 2 - t \qquad , t \in \mathbb{R}. \\ z = 0 + t \end{cases}$$

Skärningspunkt $(x, y, z) = (\frac{1}{2}, 2, 0)$.

Exempel. Bestäm skärningen mellan planet $2x+2y+z-5 = 0$ och linjen $(x, y, z) = (1, 2, 3) + t(2, 1, -2), \quad t \in \mathbb{R}$



Vi sätter in $x = 1 + 2t, \quad y = 2 + t, \quad z = 3 - 2t$ i planets ekvation:
$2\underbrace{(1 + 2t)}_{x} + 2\underbrace{(2 + t)}_{y} + \underbrace{(3 - 2t)}_{z} - 5 = 0 \Leftrightarrow 4t + 4 = 0 \Leftrightarrow t = -1$. Få ut punkten genom att sätta in $t = -1$ i linjens ekvation: $(x, y, z) = (-1, 1, 5)$.

Exempel. Affin $\rightarrow$ parameterform:

$$2x + 2y + z - 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{5} - s - \frac{1}{2}t \\ y = s \\ z = t \end{cases} \qquad s, t \in \mathbb{R}.$$