F2

Kap 2 - (Geometriska) vektorer

Begrepp.

- Punkt
- Linje
- Plan
- Rummet
- Vinkel mellan plan och rum
- Skärning

Vektorer.

- "En pil"
- Geometriskt
  - Längd
  - Riktning
- Går att flytta

Definition (Riktad sträcka)**.** Två punkter A och B (t.ex. i planet/rummet) definierar en *riktad sträcka,* $\bar{AB}$.

Två riktade sträckor sägs vara ekvivalenta om **samma**:

- Längd
- Riktning

Definition (Ekvivalensklass)**.** En (geometrisk) vektor är en ekvivalensklass av riktade sträckor. (˜flera ekvivalenta riktade sträckor är ekvivalenta = bildar en ekvivalensklass)

Definition (Nollvektorn)**.** Definieras som en vektor med längd 0 (noll), (och representeras av $\bar{AA}$ för varje A, dvs. startar och slutar i samma punkt)

Definition (Addition av vektorer)**.** "Lägg den andra vektorn i slutet av den första vektorn och dra diagonalen mellan första vektorns startpunkt och andra vektorns slutpunkt"

Definition (Skalär)**.** En skalär är ett tal.

Definition (Multiplikation av skalär och vektor)**.** "Längden blir n gånger kortare/längre. Vid negativt n, riktning förändras."

Sats (Linjära vektorrum)**.** *För alla vektorer* $\bar{u}$, $\bar{v}$ *och* $\bar{w}$ *och alla skalärer* λ *och* μ *gäller:*

Regler för addition

- A0: $\bar{u} + \bar{v}$ är en vektor
- A1: $(\bar{u} + \bar{v}) + \bar{w} = \bar{u} + (\bar{v} + \bar{w})$

Date: 2014-01-23.

- A2: $\bar{u}+\bar{v}=\bar{v}+\bar{u}$
- A3: Det finns en vektor $\bar{0}$ så att $\bar{0}+\bar{u}=\bar{u}$ för alla $\bar{u}$.
- A4: För alla $\bar{u}$ finns $\bar{v}$ så att $\bar{u}+\bar{v}=\bar{0}$.

Regler för multiplikation med skalär

- M0: $\lambda\cdot\bar{u}$ är en vektor
- M1: $\lambda(\mu\cdot\bar{u})=(\lambda\cdot\mu)\bar{u}$.
- M2: $(\lambda+\mu)\bar{u}=\lambda\bar{u}+\mu\bar{u}$
- M3: $\lambda(\bar{u}+\bar{v})=\lambda\bar{u}+\lambda\bar{v}$
- M4: $1\cdot\bar{u}=\bar{u}$

Exempel. $2\bar{u}=\bar{u}+\bar{u}$

Definition (Subtraktion)**.** $\bar{u}-\bar{v}=\bar{u}+(-1)\bar{v}$

Exempel. Givet tre punkter O, A och B gäller att: $\boxed{\bar{AB}=\bar{OB}-\bar{OA}}$. Detta följer av definitionen av addition ($\bar{OA}+\bar{AB}=\bar{OB}\Leftrightarrow\bar{AB}=\bar{OB}-\bar{OA}$).

Exempel (Mittpunktsformel)**.** Låt M vara mittpunkt på AB. Visa att $\bar{OM}=\frac{1}{2}(\bar{OA}+\bar{OB})$. O är en godtycklig punkt.

"Bevis"

$\bar{OM}=\bar{OA}+\bar{AM}$ (dvs. $\bar{OM}$ via punkten A) $=\bar{OA}+\frac{1}{2}\bar{AB}=\bar{OA}+\frac{1}{2}(\bar{OB}-\bar{OA})=\frac{1}{2}(\bar{OA}+\bar{OB})$.

Definition (Parallellitet)**.** Två vektorer är parallella om den ena kan skrivas som ett tal gånger den andra $\bar{AB}\parallel\bar{CD}\Leftrightarrow\bar{CD}=\lambda\cdot\bar{AB}$.

Eftersom $\bar{0}=0\cdot\bar{u}$ för varje $\bar{u}$ så är $\bar{0}$ parallell med alla vektorer.

Definition (Linjärkombination av vektorer)**.** Ett uttryck på formen $\lambda_1\bar{u_1}+\lambda_2\bar{u_2}+\ldots+\lambda_p\bar{u_p}$ kallas en *linjärkombination* av $\bar{u_1},\bar{u_2},\ldots,\bar{u_p}$

Definition (Bas och koordinater)**.** En uppsättning vektorer $\{\bar{e_1},\bar{e_2},\ldots,\bar{e_p}\}$ utgör en bas (för linjen/planet/rummet/vektorrum) om varje vektor $\bar{u}$ kan skrivas entydigt som en linjärkombination av $\bar{e_1},\bar{e_2},\ldots,\bar{e_p}$. Dvs $\bar{u}=\lambda_1\bar{e_1}+\lambda_2+\bar{e_2}+\ldots+\lambda_p\bar{e_p}$där $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_p$är entydigt bestämda av $\bar{u}$.Talen $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_p$ kallas koordinater för $\bar{u}$ i basen $\bar{e_1},\bar{e_2},\ldots\bar{e_p}$.Vi skriver $\bar{u}=(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_p)$.

Exempel. Linjen: Varje vektor $\bar{e_1}\neq\bar{0}$ utgör en bas för linjen

Planet: Två icke parallella vektorer $(\bar{e_1},\bar{e_2})$ utgör en bas för planet.

Rummet: Tre vektorer i rummet $(\bar{e_1},\bar{e_2},\bar{e_3})$ som inte ligger i ett plan utgör en bas i rummet.

Exempel. I en given bas är $\bar{u}=(3,2)$ och $\bar{v}=(-2,1)$ bestäm koordinaterna för $\bar{w}=2\bar{u}+3\bar{v}$. (Allmänt: $(x_1,x_2)+(y_1,y_2)=(x_1+y_1,x_2+y_2)$, $\lambda(x_1,x_2)=(\lambda x_1,\lambda x_2)$)

Lösning: $\bar{w}=2\bar{u}+3\bar{w}=2(3,2)+3(-2,1)=(6,4)+(-6,3)=(0,7)$.

Exempel. Antag att $\bar{u}=(2,3)$, $\bar{v}=(-4,6)$ (i någon bas). Utgör $\bar{u}$ och $\bar{v}$ någon bas?

Lösning: $\bar{u}\parallel\bar{v}$?

$$\bar{v}=k\bar{u}\Leftrightarrow\begin{cases}-4=2k\\6=3k\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k=-2\\k=2\end{cases}$$

$\bar{v}\nparallel\bar{u}$ ty $-2\neq 2$.

Svar: Ja!

2.4 Linjärt oberoende/beroende.

Definition (Linjärt beroende/oberoende)**.** Vektorerna $\bar{u_1}, \ldots \bar{u_p}$ är linjärt *beroende* om någon av dem är en linjär kombination av dem andra. Om inte så är de linjärt *oberoende.* ($\tilde{}$pekar inte i lika många riktningar som de är)

Sats (Bassatsen)**.**

(1) Två vektorer i planet utgör en bas för planet $\Leftrightarrow$ de är linjärt *oberoende*
(2) Tre vektorer i rummet utgör en bas för rummet $\Leftrightarrow$ de är linjärt *oberoende*
(3) Fler än två vektorer i planet är alltid linjärt beroende (den tredje går att utrycka som en linjär kombination av de andra två)
(4) Fler än tre vektorer i rummet är alltid linjärt beroende (den fjärde går att utrycka genom de andra tre)

Sats (Hur veta linjärt (o)beroende)**.**

(1) $\bar{u_1}, \bar{u_2}, \ldots \bar{u_p}$ är linjärt beroende $\Leftrightarrow$ Ekvationen $\lambda_1\bar{u_1} + \lambda_2\bar{u_2} + \ldots + \lambda_p\bar{u_p} = \bar{0}$ har en lösning där inte alla λ =0
(2) $\bar{u_1}, \bar{u_2}, \ldots \bar{u_p}$ är linjärt oberoende $\Leftrightarrow$Ekvationen $\lambda_1\bar{u_1} + \lambda_2\bar{u_2} + \ldots + \lambda_p\bar{u_p} = \bar{0}$ endast har lösningen $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_p = 0$.

Exempel. Utgör vektorerna $\bar{u_1} = (1, 2, 3), \bar{u_2} = (1, 0, 1), \bar{u_3} = (-1, -4, -5)$ en bas i rummet?

Lösning: Bassatsen är de linjärt oberoende?

Satsen ovan $\lambda_1\bar{u_1} + \lambda_2\bar{u_2} + \lambda_3\bar{u_3} = \bar{0} \Leftrightarrow \lambda_1(1, 2, 3) + \lambda_2(1, 0, 1) + \lambda_3(-1, -4, -5) =$

$$(0, 0, 0) \overbrace{\Leftrightarrow}^{\text{(jmf. koordinater)}} \begin{cases} \lambda_1 & +\lambda_2 & -\lambda_3 & = & 0 \\ 2\lambda_1 & & -4\lambda_3 & = & 0 \\ 3\lambda_1 & +\lambda_2 & -5\lambda_3 & = & 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 & +\lambda_2 & -\lambda_3 & = & 0 \\ & \lambda_2 & +\lambda_3 & = & 0 \\ & & 0 & = & 0 \end{cases}$$

Vi får parameterlösning. Speciellt får vi lösningar skilda från noll. Alltså är $\bar{u_1}, \bar{u_2}, \bar{u_3}$ inte en bas.